ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 1er MAI 1939.

PRÉSIDENCE DE M. AUGUSTE BÉHAL.



MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur une interprétation des probabilités virtuelles.* Note [1] de M. ÉMILE BOREL.

J'ai indiqué [2] comment la probabilité de certaines répartitions pouvait être calculée en faisant le produit des probabilités virtuelles des éléments de la répartition, c'est-à-dire par une formule analogue à celle des probabilités composées. Rappelons les notations : nous avons N objets analogues, parmi lesquels A_i de l'espèce E_i; on a

$$N = A_1 + A_2 + \ldots + A_k. \tag{1}$$

On choisit au hasard n objets parmi ces N objets et l'on obtient une répartition comprenant a_i objets de l'espèce E_i; on a

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k. \tag{2}$$

La probabilité $P_{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ de cette répartition est donnée par la formule

$$P_{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{C_{A_1}^{a_1} C_{A_2}^{a_2} \ldots C_{A_k}^{a_k}}{C_N^n}. \tag{3}$$

Désignons par p et q deux nombres positifs non nuls quelconques, dont la somme est égale à 1 ; nous dirons que p est la probabilité de l'événement favorable; la probabilité pour que l'événement favorable se produise b fois

(1) Séance du 24 avril 1939.

(2) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 1177.

sur B épreuves est donnée par la formule

$$(4) \qquad P(b, B) = C_B^b p^b q^{B-b}.$$

Si l'on tient compte des relations (1) et (2) la relation (3) peut s'écrire

$$(5) \qquad P_{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{P(a_1, A_1)\,P(a_2, A_2)\ldots P(a_k, A_k)}{P(n, N)},$$

ce qui peut s'énoncer sous la forme suivante :

La probabilité d'obtenir une répartition (2) *est égale au produit des probabilités d'obtenir a_i résultats favorables sur A_i épreuves, divisé par la probabilité d'obtenir n résultats favorables sur N épreuves, et cela, quelle que soit la probabilité p de l'événement favorable.*

On obtiendra les probabilités virtuelles $p_i = \varphi(a_i, A_i, n, N)$ considérées dans la Note précédente en posant

$$p_i = \varphi(a_i, A_i, n, N) = \frac{P(a_i, A_i)}{[P(n, N)]^{\frac{A_i}{N}}}.$$

On remarquera que l'expression de p_i est homogène et de degré zéro par rapport à l'ensemble des deux variables p et q; elle dépend du rapport $p/q = \lambda$.

Il peut paraître naturel de prendre $p = n/N$, c'est-à-dire d'admettre que, puisque l'on choisit n objets sur N, la probabilité pour chaque objet d'être choisi est n/N. C'est cette valeur de p qui rend maximum $P(n, N)$. Lorsque N et n sont grands, on a asymptotiquement

$$P(n, N) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi N p q}}.$$

Si nous posons $\sqrt{2\pi N p q} = \sigma^N$, les probabilités virtuelles p_i pourront s'obtenir en remplaçant dans la formule (4) les probabilités réelles p et q par les probabilités fictives σp et σq dont la somme est σ.

Au lieu d'extraire n objets d'une urne renfermant N objets de k espèces différentes, on peut, pour chacun des N objets considérés isolément, décider s'il sera *choisi* ou *non choisi* en effectuant une épreuve indépendante, dans laquelle les probabilités du choix et du non-choix sont respectivement $p = n/N$ et $q = 1 - p$. En procédant ainsi, on obtiendra une répartition $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dont les éléments auront une somme généralement différente de n; la probabilité de cette répartition est évidemment égale au produit des $P(a_i, A_i)$ définis par la formule (4). Lorsque l'on

impose aux éléments de la répartition la condition d'avoir une somme égale à n, ce qui détruit l'indépendance des épreuves, on peut utiliser une formule entièrement semblable, mais à condition de remplacer dans (4) les probabilités p et q par σp et σq. Nous donnerons à σ le nom de *coefficient de dépendance*. Grâce à l'emploi de ce coefficient, qui ne dépend ni de k, ni de $A_1, A_2, \ldots, A_k$, tous les problèmes de répartition peuvent être traités comme si les N épreuves étaient indépendantes, bien qu'elles ne le soient pas.

On peut obtenir le même résultat sous une forme encore plus simple en observant que la formule (5) reste vraie quels que soient p et q, sans qu'il soit nécessaire de supposer $p+q=1$; il suffit de choisir p et q de manière que $P(n, N)=1$ pour que la formule (5) se réduise à un produit de probabilités virtuelles; le cas particulier où p et q sont proportionnels à n et $N-n$ nous donne $p+q=\sigma$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Application de la méthode de Darboux aux équations $s=f(x, y, z, p, q)$: Invariants rationnels*. Note de M. **Jules Drach**.

1. Il s'agit de trouver les équations

$$s=f(x, y, z, p, q) \tag{1}$$

pour lesquelles il existe *un invariant rationnel* en $p_1, \ldots, p_n$

$$\varphi=\varphi(x, y; z, p, p_1, \ldots, p_n)=F(x), \tag{2}$$

où $p_1=\partial p/\partial x$, $p_2=\partial p_1/\partial x$, ...; le cas des invariants entiers étant écarté (¹). On établit aisément que φ est quotient de deux expressions $\psi_n=p_n+\Omega_n$, $\psi_m=p_m+\Omega_m$, donnant lieu aux identités

$$\frac{d\psi_n}{dy}=\frac{\partial f}{\partial p}\psi_n, \qquad \frac{d\psi_m}{dy}=\frac{\partial f}{\partial p}\psi_m. \tag{3}$$

Les équations $\psi_n=0$, ou *involutions*, sont invariantes. D'après une remarque déjà faite, toute transformation $Z=Z(x, y, z)$, $X=X(x)$ conserve la *forme* de (1) et doit conserver celle de (2); on peut donc supposer que ψ_n ne renferme que des termes de *poids n* ou *inférieur* : p_n,

(¹) Cf. *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 1181-1185.

$p_1 p_{n-1}, \ldots, p_{n-1}, p_1 p_{n-2}, \ldots$, les coefficients dépendant de x, y, z, p seuls.

Soit $\psi_n = p_n + A p_1 p_{n-1} + \ldots$; l'équation en A, où l'on pose

$$A \frac{\partial\theta}{\partial p} = n \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2},$$

s'intègre deux fois en p et donne $\partial\theta/\partial y + q(\partial\theta/\partial z) + (\partial\theta/\partial p) f = \mu\theta + \nu$, où μ, ν ne dépendent plus de p. On a donc pour (1) la forme $d\theta/dy = \mu\theta + \nu$ ou *en regardant p comme fonction de* θ, x, y, z,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q + \frac{\partial p}{\partial \theta}(\mu\theta + \nu).$$

L'involution d'ordre n, où l'on a posé $\Phi_n = \partial\theta/\partial p\, \psi_n$, s'écrit $d\Phi_n/dy = \mu\Phi_n$, et l'on trouve que les termes de poids n comprennent $d^n\theta/dx^n$, ce qui conduit à écrire

$$\Phi_n = \frac{d^n\theta}{dx^n} + A \frac{d\theta}{dx} \frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \ldots,$$

où ne figurent que des termes de *poids n* et inférieurs à n, si $d^k\theta/dx^k$ est de poids k; les coefficients A, ... dépendant de x, y, z et θ.

L'identité en $d^{n-1}\theta/dx^{n-1}, \ldots, d\theta/dx$ (où d/dx et d/dy sont permutables)

$$(4) \qquad \frac{d^n}{dx^n}(\mu\theta + \nu) + A\left[\frac{d}{dx}(\mu\theta + \nu)\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \frac{d\theta}{dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\mu\theta + \nu)\right] + \frac{dA}{dy}\frac{d\theta}{dx}\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \ldots = \mu\Phi_n$$

donne les conditions pour les coefficients A, ..., en tenant compte des formules

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu_1, \qquad \frac{d^2\mu}{dx^2} = \frac{\partial\mu_1}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dx} + \mu_2 \qquad \text{avec} \quad \mu_2 = \Omega(\mu_1) = \frac{\partial\mu_1}{\partial x} + \frac{\partial\mu_1}{\partial z} p + \frac{\partial\mu_1}{\partial q}\frac{dp}{dy}, \quad \ldots.$$

2. *Involution du second ordre.* — Si l'on part d'une équation $d\theta/dy = \mu\theta + \nu$, on aura $\Phi_1 = d\theta/dx + V(x, y, z, \theta)$ et la condition $d\Phi_1/dx = \mu\Phi_1$ donne

$$(5) \qquad \frac{dV}{dy} + \theta\mu_1 + \nu_1 = \mu V.$$

Remarque. — En partant d'une équation $s = f(x, y, z, p, q)$ et de $\psi_1 = p_1 + u$ on a seulement, si l'on pose $u\, \partial\omega/\partial p = \partial\omega/\partial x + p\, \partial\omega/\partial z$ où ω dépend de x, y, z, p, une équation (1) $d\omega/dy = m(x, y, z, q, \omega)$ avec l'involution $d\omega/dx = 0$ et la condition

$$\frac{\partial m}{\partial x} + p\frac{\partial m}{\partial z} + \frac{\partial m}{\partial q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z} + m\frac{\partial p}{\partial\omega}\right) = 0, \quad \text{pour } m \text{ et } p.$$

Involution du troisième ordre. — Elle s'écrira, *a priori*,

$$\Phi_2 = \frac{d^2\theta}{dx^2} + \alpha\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + \beta\frac{d\theta}{dx} + \gamma,$$

et la condition $d\Phi_2/dy = \mu\Phi_2$ donnera les équations pour α, β, γ. La première : $d\alpha/dy = -\mu\alpha$ montre, si $\alpha \neq 0$, que $\alpha\Phi_2$ est un invariant *entier*, cas écarté ; donc $\alpha = 0$ et

$$(6)\qquad \frac{d\beta}{dy} + 2\mu_1 + \theta\frac{\partial\mu_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\nu_1}{\partial\theta} = 0; \qquad \frac{d\gamma}{dy} + \beta(\theta\mu_1 + \nu_1) + \theta\Omega(\mu_1) + \Omega(\nu_1) = \mu\gamma.$$

Invariant du troisième ordre. — En tenant compte de (5), on a, en supposant l'existence de Φ_1 et Φ_2,

$$(7)\qquad \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \mu_1 + \theta\frac{\partial\mu_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\nu_1}{\partial\theta} = 0,$$

d'où l'on conclut, en posant $\beta - \partial V/\partial\theta = B$,

$$(8)\qquad \frac{dB}{dy} + \mu_1 = 0.$$

On trouve ensuite, en posant $\delta = \lambda - \Omega(V) - BV$, $d\delta/dy = \mu\delta$; si $\delta \neq 0$, $\delta^{-1}\Phi_2$ est un invariant *entier* ; donc $\delta = 0$. L'involution du troisième ordre est alors $\Phi_2 = d^2\theta/dx^2 + dV/dx + B(d\theta/dx + V)$ puisque $dV/dx = (\partial V/\partial\theta)(d\theta/dx) + \Omega(V)$.

Ainsi l'invariant d'ordre 3 a la forme simple

$$(9)\qquad \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\theta}{dx} + V\right)}{\dfrac{d\theta}{dx} + V} + B = F(x),$$

sous les conditions

$$(10)\qquad \frac{dB}{dy} + \frac{d\mu}{dx} = 0, \qquad \frac{dV}{dy} + \theta\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\nu}{dx} = \mu V.$$

La première, *linéaire* en B et en $p(x, y, z, \theta)$, est à étudier d'abord ; elle ne renferme que ν et les dérivées de μ. On peut éliminer ν.

3. *Involution d'ordre* $(n+1)$. — Si l'on pose, comme plus haut,

$$\Phi_n = \frac{d^n\theta}{dx^n} + A\frac{d\theta}{dx}\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \ldots + P\frac{d^{n-1}\theta}{dx^{n-1}} + \ldots,$$

l'identité $d\Phi_n/dy = \mu\Phi_n$ donne d'abord $dA/dy + \mu A = 0$, d'où l'on conclut,

si $A \neq 0$, que $A\Phi_n$ est un invariant *entier*; donc $A = 0$. La même conclusion s'étend à tous les termes *de poids n*; le coefficient C de l'un d'eux satisfait à $dC/dy = -k\mu C$, où k est un entier, d'où, si $C \neq 0$, l'invariant *entier* $C^{1/k}\Phi_n$. On a donc $C = 0$ et le premier terme de Φ_n est $P\, d^{n-1}\theta/dx^{n-1}$.

La condition pour P est alors

$$\frac{dP}{dy} + n\mu_1 + \theta\frac{\partial\mu_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\nu_1}{\partial\theta} = 0,$$

et l'on forme aisément les autres.

Invariant d'ordre $(n+1)$, Φ_n/Φ_m. — Si l'on suppose l'existence d'une autre involution Φ_m, où $m < n$, on peut l'écrire

$$\Phi_m = \frac{d^m\theta}{dx^m} + Q\frac{d^{m-1}\theta}{dx^{m-1}} + \ldots,$$

et la condition $d\Phi_m/dy = \mu\Phi_m$ donne

$$\frac{dQ}{dy} + m\mu_1 + \theta\frac{\partial\mu_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\nu_1}{\partial\theta} = 0.$$

On en déduit donc, en posant $P - Q = (n-m)B$, $dB/dy + \mu_1 = 0$, c'est-à-dire *la première des équations* (10).

Posons maintenant $\partial V/\partial\theta = P - (n-1)B$, ce qui détermine V à une fonction additive de x, y, z près; cette équation est-elle compatible avec

$$\frac{dV}{dy} = \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial\theta}(\mu\theta + \nu) = \mu V - \theta\mu_1 - \nu_1\,?$$

Si l'on différencie en θ, on a l'identité

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = -\left(\mu_1 + \theta\frac{\partial\mu_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\nu_1}{\partial\theta}\right) = \frac{dP}{dy} - (n-1)\frac{dB}{dy},$$

mais il faut que V soit indépendant de q, ce qui donne $\partial V/\partial y$ et $\partial V/\partial z$, d'où de nouvelles conditions.

Toutefois, si V existe, c'est-à-dire *s'il y a une involution du second ordre, et une d'ordre n*, on peut prendre $(n-1)B = P - \partial V/\partial\theta$, d'où l'on conclut $dB/dy + \mu_1 = 0$, c'est-à-dire *un invariant du troisième ordre*.

4. *Involution du quatrième ordre*. — Si l'on part de la forme *réduite*

$$\Phi_3 = \frac{d^3\theta}{dx^3} + R\frac{d^2\theta}{dx^2} + S\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + T\frac{d\theta}{dx} + U,$$

on trouve les conditions d'existence

$$\frac{dR}{dy} + 3\mu_1 + \theta\frac{\partial\mu_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\nu_1}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{dS}{dy} + S\mu + 3\frac{\partial\mu_1}{\partial\theta} + \theta\frac{\partial^2\mu_1}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\nu_1}{\partial\theta^2} = 0,$$

et deux autres donnant dT/dy et $dU/dy - \mu U$. On en déduit pour $S - \partial R/\partial\theta = \Sigma$, la condition

$$\frac{d\Sigma}{dy} + \mu\Sigma = \frac{\partial\mu_1}{\partial\theta} = \frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \frac{\partial\mu}{\partial q}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right),$$

linéaire en Σ et p. *Une équation analogue existe pour toute involution.*

Si l'on suppose à la fois une involution du *troisième ordre* et une du *quatrième*, on trouve, comme il a été dit, $B = R - \beta$, avec la condition $dB/dy + \mu_1 = 0$ et ensuite $d[\Sigma - (\partial B/\partial\theta)]/dy + \mu[\Sigma - (\partial B/\partial\theta)] = 0$, d'où l'on conclut si $\Sigma - \partial B/\partial\theta \neq 0$ un invariant entier $[\Sigma - (\partial B/\partial\theta)]\Phi_3$. Il faut donc $\Sigma = \partial B/\partial\theta$ ou $S = \partial(\beta + 2B)/\partial\theta$. Il reste à étudier les équations en T et U, si l'on a déterminé β et γ. L'équation en $\Theta = T - \Omega(B + \beta) - \partial\gamma/\partial\theta$ est simple.

En résumé, la recherche des invariants rationnels exige d'abord la *résolution de l'équation* $dB/dy + d\mu/dx = 0$ *et ce n'est que parmi les formes trouvées pour* p, μ, ν *que l'on peut rencontrer ces invariants*. On a de même une condition simple pour toute involution.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur l'action d'un anneau circulaire sur le périhélie et le nœud d'une planète.* Note de M. **Jean Chazy**.

Pierre Fatou a considéré (¹) les mouvements presque circulaires d'un point matériel dans un champ de gravitation présentant un axe de révolution et un plan de symétrie perpendiculaire, et dérivant d'ailleurs d'un potentiel newtonien, voisin le plus souvent du potentiel du corps central. Il a étudié ces mouvements par des méthodes directes, sans introduire les éléments osculateurs. Je veux rattacher ici une partie des résultats de Fatou à la méthode classique de détermination des petits mouvements d'un système matériel au voisinage d'une position d'équilibre stable.

(¹) *Acta astronomica*, série *a*, **2**, 1931, p. 101-163. Cf. Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, **1**, 1928, p. 195-203; *Comptes rendus*, **203**, 1936, p. 706, 844 et 981; *American Journal of Mathematics*, **60**, 1938, p. 793-800.

Définissons le champ considéré par le potentiel $F(r, z)$ par unité de masse, où r désigne la distance du point matériel P au corps central O, et z la cote du point P comptée à partir du point O sur l'axe de révolution Oz : F est une fonction paire de la variable z. En coordonnées semi-polaires, soient r_1, θ, z $\left(r=\sqrt{r_1^2+z^2}\right)$, le mouvement du point P est déterminé par l'intégrale des aires

$$r_1^2\theta'=C,$$

par l'équation du mouvement relatif sur le rayon vecteur

$$r_1''-r_1\theta'^2=\frac{\partial F}{\partial r}\frac{r_1}{r} \quad \text{ou} \quad r_1''=\frac{C^2}{r_1^3}+\frac{\partial F}{\partial r}\frac{r_1}{r},$$

et par l'équation de projection sur Oz

$$z''=\frac{\partial F}{\partial r}\frac{z}{r}+\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Considérons des mouvements où la constante C a une valeur fixe, éliminons l'angle polaire θ au moyen de l'intégrale des aires, et étudions, dans le plan passant à chaque instant par l'axe Oz et par la position du point P, le mouvement relatif défini par le rayon vecteur r et la cote z, ou par les coordonnées cartésiennes r_1 et z. Dans ce mouvement la force relative dérive de la fonction

$$U=-\frac{C^2}{2(r^2-z^2)}+F(r, z).$$

La valeur $z=0$, une valeur commune ρ du rayon vecteur r et de la coordonnée r_1, et la vitesse angulaire ω donnée par l'équation $\rho^2\omega=C$, déterminent un mouvement circulaire du point P si ces valeurs correspondent dans le mouvement relatif considéré à une position d'équilibre relatif. Or la dérivée $\partial U/\partial z$ est identiquement nulle avec z, puisque F est une fonction paire de z; donc les valeurs ρ, ω et $z=0$ doivent annuler la dérivée

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{C^2 r}{(r^2-z^2)^2}+\frac{\partial F}{\partial r}, \quad \text{soit} \quad \frac{C^2}{\rho^3}+\frac{\partial F}{\partial \rho}=\omega^2\rho+\frac{\partial F}{\partial \rho}=0,$$

$\partial F/\partial\rho$ désignant la valeur de la dérivée partielle $\partial F/\partial r$ pour $r=\rho$, $z=0$; nous retrouvons cette condition élémentaire que dans le mouvement circulaire, pour une masse unité, la force est égale à l'accélération normale. Pour étudier les mouvements du point P voisins du mouvement circulaire

correspondant à cet équilibre relatif, nous sommes ramenés à étudier, parmi les mouvements relatifs considérés, les petits mouvements voisins de la position d'équilibre obtenue.

Appliquons la méthode classique avec z et $r-\rho$ comme variables indépendantes. La force vive relative est

$$z'^2 + r_1'^2 = z'^2 + \frac{(rr' - zz')^2}{r^2 - z^2},$$

et se réduit à $z'^2 + r'^2$ si l'on fait $z=0$, $r=\rho$ dans les coefficients de z'^2, $z'r'$, r'^2. De même dans la fonction de force réduite le terme rectangle est nul à cause de la parité de F et de U; la dérivée $\partial^2 U/\partial z^2$ se réduit à la quantité

$$-\frac{C^2}{\rho^4} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\omega^2 - q,$$

si l'on désigne par $-q$ la valeur de la dérivée $\partial^2 F/\partial z^2$ pour $z=0$, $r=\rho$: cette valeur est négative dans les différentes applications, de sorte que q est un coefficient positif. Enfin la dérivée $\partial^2 U/\partial r^2$ se réduit à la quantité

$$-\frac{3C^2}{\rho^4} + \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = -3\omega^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} = -\omega^2 + q,$$

compte tenu de l'équation transformée de l'équation de Laplace et vérifiée par la fonction F. Pourvu que le carré ω^2 soit supérieur au coefficient q, la position d'équilibre considérée est stable, et la fonction de force réduite est, après multiplication par 2,

$$-(\omega^2 + q)z^2 - (\omega^2 - q)(r-\rho)^2.$$

On tire des expressions de la force vive réduite et de la fonction de force réduite les deux équations

$$z'' = -(\omega^2 + q)z,$$
$$r'' = -(\omega^2 - q)(r-\rho),$$

qui mettent en évidence les deux périodes fondamentales $2\pi/\omega_1$ et $2\pi/\omega_2$, si l'on pose $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + q}$, $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 - q}$. Il résulte que les deux variables z et $r-\rho$ sont développables en séries entières par rapport aux quatre valeurs initiales z_0, z'_0, $r_0 - \rho$, r'_0, convergentes si ces quatre valeurs sont assez petites, et dont nous écrivons seulement les termes linéaires

$$z = z_0 \cos\omega_1 t + \frac{z'_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + \ldots, \qquad r - \rho = (r_0 - \rho)\cos\omega_2 t + \frac{r'_0}{\omega_2}\sin\omega_2 t + \ldots.$$

Mais il y a une différence entre les deux développements qui précèdent.

Dans le développement de la variable z, chaque terme contient le facteur z_0 ou z'_0, puisque, si les deux facteurs z_0 et z'_0 sont nuls à la fois, ce développement doit être identiquement nul. Donc il peut se mettre sous la forme

$$z = z_0(\cos\omega_1 t + \varepsilon) + \frac{z'_0}{\omega_1}(\sin\omega_1 t + \varepsilon_1),$$

où les deux fonctions ε, ε_1 tendent vers zéro avec les valeurs z_0, z'_0, $r_0 - \rho$, r'_0. Et cette forme met en évidence que les intervalles de temps séparant deux instants consécutifs où z s'annule en passant du négatif au positif, sont aussi voisins que l'on veut de la période fondamentale $2\pi/\omega_1$. Donc le mouvement du point P comporte une révolution draconitique de durée sensiblement constante, pourvu que les valeurs initiales z_0, z'_0, $r_0 - \rho$, r'_0 soient assez petites, mais dans des rapports quelconques.

Au contraire le développement de la variable $r - \rho$ contient en général des termes de degré 2 en z_0, z'_0, et peut s'écrire

$$r - \rho = (r_0 - \rho)(\cos\omega_2 t + \varepsilon_2) + \frac{r'_0}{\omega_2}(\sin\omega_2 t + \varepsilon_3) + z_0^2 f(t) + z_0 z'_0 g(t) + z'^2_0 h(t),$$

ε_2, ε_3, $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ désignant cinq fonctions du temps dont les deux premières tendent vers zéro avec z_0, z'_0, $r_0 - \rho$, r'_0. Par conséquent les instants correspondant aux minima et aux maxima du rayon vecteur r sont donnés en valeurs approchées par les racines de l'équation

$$(r_0 - \rho)\cos\omega_2 t + \frac{r'_0}{\omega_2}\sin\omega_2 t = 0,$$

et, par suite, le mouvement du point P comporte une révolution anomalistique de durée sensiblement constante et égale à la seconde période fondamentale $2\pi/\omega_2$, *à condition que les trois quantités* z_0^2, $z_0 z'_0$, z'^2_0 *soient négligeables en valeurs moyennes devant les deux termes linéaires.*

Si l'on définit les éléments osculateurs du mouvement à partir de la masse du corps central et du plan de symétrie du champ de gravitation, et d'après les expressions du rayon vecteur r et de la cote z en fonction de ces éléments, on peut exprimer la condition précédente en disant que sur les orbites considérées, le quotient i^2/e du carré de l'inclinaison par l'excentricité doit être assez petit. D'ailleurs la parité de F par rapport à z entraîne cette conséquence que les équations de Lagrange correspondantes ne changent pas si l'on change i en $-i$.

Au total, et comme la vitesse angulaire θ' tend elle-même vers la valeur ω, nous pouvons énoncer les résultats obtenus sous la forme :

A des erreurs près de l'ordre de l'excentricité et du carré de l'inclinaison, la durée de la révolution draconitique et l'avance du nœud sont données par les formules

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 + q}}, \qquad \delta\Omega = 2\pi\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + q}} - 1\right),$$

où ω *désigne la vitesse angulaire du mouvement circulaire limite, et où* q *désigne la valeur changée de signe de la dérivée seconde* $\partial^2 F/\partial z^2$ *prise pour la valeur zéro de la cote* z, *et pour la valeur du rayon vecteur* r *égale au rayon du mouvement circulaire limite.*

La durée de la révolution anomalistique et l'avance du périhélie sont données de même par les formules

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - q}}, \qquad \delta\varpi = 2\pi\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - q}} - 1\right),$$

où les quantités ω *et* q *ont les mêmes significations, mais avec cette restriction que dans le mouvement du point* P, *s'il n'a pas lieu dans le plan de symétrie du champ de gravitation, le quotient* i^2/e *doit être lui-même assez petit, et qu'on néglige aussi une erreur de l'ordre de ce quotient.*

M. **Maurice de Broglie** fait hommage à l'Académie d'un Ouvrage qu'il vient de publier sous le titre *Atomes, radioactivité, transmutations.*

M. **H. Perrier de La Bâthie** fait hommage à l'Académie de Mémoires intitulés *Les Orchidées de la région malgache (Variation, Biologie et Distribution); Biogéographie des Palmiers de la région malgache; Un nouveau genre malgache de Cæsialpiniacées.*

NOMINATIONS.

M. **Gaston Julia** est délégué pour représenter l'Académie à la célébration du *Bicentenaire* de la fondation de l'*Académie Royale des Sciences de Suède*, les 23, 24 et 25 septembre 1939.

M. **Eugène Fichot** est délégué pour représenter l'Académie au 16e Congrès de l'*Association bourguignonne des Sociétés savantes*, au Creusot, les 2, 3 et 4 juin 1939.

ÉLECTIONS.

Par l'unanimité des suffrages M. **Emmanuel Teodoresco** est élu Correspondant pour la Section de Botanique.

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

Le fascicule Octobre-Décembre 1938 du *Bulletin trimestriel de l'Association Amicale des anciens Élèves de l'École d'Électricité Industrielle de Paris*, consacré en partie *A la mémoire d'André Blondel* (1863-1938).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la construction des équations* $s+f(x, y, z, p, q, r)=0$ *qui possèdent un invariant du second ordre*. Note de M. **Georges Heilbronn**, présentée par M. Jules Drach.

1. MM. Gau, R. Gosse et Lainé [1] ont déterminé tous les cas où l'équation du second ordre, *indépendante* de r et t, possède un invariant du second ordre. Je me propose d'appliquer la théorie due à M. Drach (emploi des caractéristiques *explicites*) et la méthode récente signalée par lui [2] aux équations

$$s+f(x, y, z, p, q, r)=0, \tag{1}$$

où l'on a une caractéristique $y=\beta$, l'autre α donnant

$$\frac{\partial x}{\partial \beta}=\frac{\partial f}{\partial r}. \tag{2}$$

---

[1] Gau, *Thèse*, Paris, 1911; *Ann. Univ. Grenoble*, **25**, 1913, p. 95-107; R. Gosse, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, **12**, 1921, p. 10-68; **16**, 1924, p. 204-240; *Mémorial des Sciences Math.*, fasc. 12, 1926, p. 29; Lainé, *Thèse*, Cracovie, 1928.

[2] *Atti del Congresso Int. Bologna*, 6, 1928, p. 11-25, et *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 1181-1185.

Les conditions d'intégrabilité en α, β des différentielles totales dz, dp, dx donnent pour remplacer (1) les dérivées de z, p, x, où figure

$$f\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{\partial q}{\partial \alpha} \tag{3}$$

et deux conditions, où (d/dx) ne porte pas sur r,

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} = -\left(\frac{df}{dx}\right); \qquad \frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) + \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = 0; \tag{Σ}$$

l'ensemble est le *système normal* de M. Drach et les dérivées paramétriques *d'ordre supérieur* sont les dérivées de r en α et celles de q en β seul ou en α seul, à partir de $\partial^2 q/\partial\alpha^2$.

2. Si l'on cherche un invariant du *second ordre, pour la variable* β, il s'écrira, s'il est de degré minimum en $\partial q/\partial\beta$, $\Phi = A(\partial q/\partial\beta) + B = F(\beta)$. La dérivation en α donnera les conditions relatives à A et B; l'une d'elles est $\partial A/\partial r = 0$, et si l'on pose $A = \partial\theta/\partial q$, θ désignant une nouvelle inconnue, on a, en intégrant l'autre par rapport à q,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial z}p + \frac{\partial \theta}{\partial p}r - \frac{\partial \theta}{\partial q}f - \lambda = 0, \tag{4}$$

où λ ne dépend plus de q, et l'équation (1) s'écrit $(d\theta/dx) + \lambda = 0$, ou encore, en multipliant par $\partial x/\partial\alpha$,

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{\lambda}{f}\frac{\partial q}{\partial \alpha}. \tag{5}$$

Si l'on complète dans Φ la dérivée $d\theta/d\beta$, on obtiendra l'invariant $\Phi = (d\theta/d\beta) + C = F(\beta)$ dont la condition d'existence est

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\lambda}{f}\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right) + \frac{dC}{d\alpha} = 0, \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{f}\frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{d\lambda}{d\beta} - \lambda\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{dC}{d\alpha} = 0,$$

en faisant appel à (Σ).

Enfin, en posant $C - \lambda(\partial f/\partial r) = D$, on a, pour D, l'équation

$$\frac{dD}{d\alpha} + \frac{1}{f}\frac{\partial q}{\partial \alpha}\frac{d\lambda}{d\beta} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{d\lambda}{d\alpha} = 0. \tag{6}$$

Regardons maintenant, avec M. Drach, q comme fonction de x, β, z, p et de la nouvelle variable θ, où $\theta(x, \beta, z, p, q) = \theta$; l'équation précédente

se partage en deux équations *linéaires* en q

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathrm{D}}{\partial r} = -\dfrac{\partial \lambda}{\partial r}\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial r}\dfrac{\partial q}{\partial \theta} - \dfrac{\partial q}{\partial p}\right), \\ \dfrac{\partial \mathrm{D}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{D}}{\partial z}p + \dfrac{\partial \mathrm{D}}{\partial p}r - \dfrac{\partial \mathrm{D}}{\partial \theta}\lambda = \dfrac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \lambda}{\partial z}q + \dfrac{\partial \lambda}{\partial p}\dfrac{dq}{dx}, \end{array}\right.$$

l'équation initiale s'écrivant

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial z}p + \frac{\partial q}{\partial p}r - \frac{\partial q}{\partial \theta}\lambda.$$

Ce sont ces équations (D) qui doivent posséder une solution et une seule en D. Au lieu de chercher q, on pourra en posant $\mathrm{D} - (\partial\lambda/\partial p)q = \mathrm{M}$, obtenir q explicitement au moyen des dérivées de M; la première équation se réduit à *une équation linéaire du second ordre pour déterminer* M *en partant de* λ, *qui peut être pris arbitrairement.*

3. Dans le cas particulier où f est linéaire en r, $s + ar + b = 0$, on peut aller un peu plus loin. La fonction λ est indépendante de r et l'équation $d\theta\, dq + \lambda = 0$, où $a\,\partial\theta\, \partial q = \partial\theta/\partial p$, admet l'invariant $d\theta/d\beta + \lambda a + \mathrm{D} = \mathrm{F}(\beta)$ sous les conditions, linéaires en q,

$$(\mathrm{D}')\qquad \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial p} = \frac{\partial \lambda}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial z}p - \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \theta}\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}q + \frac{\partial \lambda}{\partial p}\left(\frac{dq}{dx}\right).$$

Ici encore, en posant $\mathrm{D} - q\,\partial\lambda/\partial p = \mathrm{M}$, on obtient, par la seconde condition, q au moyen des dérivées de M; mais il en est de même pour la première et *l'équation en* M *est linéaire du premier ordre*.

Lorsque $\partial\lambda/\partial\beta = 0$, on voit aisément que, λ étant fixé, il existe deux intégrales M_1, M_2 indépendantes de θ; la troisième, obtenue par quadratures, peut s'écrire $\theta + \mathrm{N}$ et M est donné en x, z, p, θ par une relation $\mathrm{M} = \psi(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \theta + \mathrm{N})$ où ψ est arbitraire. L'équation en M est l'équation d'Euler qui correspond à la variation de l'intégrale $\int \lambda(x, z, p)\, dx$ où $p = dz/dx$, de sorte qu'à toute équation $dp/dx = \varphi(x, z, p)$, que l'on sait intégrer, on peut faire correspondre *par quadratures* une expression de λ et celle de M, donc aussi celle de l'invariant

$$\frac{d\theta}{d\beta} - \lambda\frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial \lambda}{\partial p}q + \mathrm{M} = \mathrm{F}(\beta).$$

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur une propriété caractéristique des fonctions harmoniques et biharmoniques.* Note de M. **Max Eger**, présentée par M. Élie Cartan.

Un théorème classique de Schwarz permet de caractériser une fonction linéaire d'une variable par la nullité en chaque point de la dérivée seconde directe. Les fonctions harmoniques étant, par certains côtés, une généralisation des fonctions linéaires, on s'est attaché à trouver des propriétés caractéristiques des fonctions harmoniques qui soient la généralisation de celles connues pour les fonctions linéaires. De là par exemple les réciproques du théorème de Gauss sur la valeur moyenne sur une circonférence. M. Blaschke a même observé qu'il suffit que l'écart entre la valeur moyenne sur une circonférence et la valeur au centre soit *infiniment petit d'ordre supérieur à deux* par rapport au rayon pour que la fonction considérée, supposée continue, soit harmonique.

Dans le même ordre d'idées M. Zaremba [1] a donné une condition d'harmonicité généralisant directement celle de Schwarz pour une fonction linéaire.

Dans cette Note je me propose de donner un critère d'harmonicité que je crois nouveau, et offrant l'avantage d'être *invariant par transformation conforme*, ce qui donne une démonstration directe d'une propriété bien connue des fonctions harmoniques.

1. Soit $f(M)$ une fonction continue dans un domaine plan. Soit une suite de n, $(n \geqq 3)$, points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ tendant vers un point M. Sur la répartition de ceux-ci je ferai les hypothèses suivantes : les distances des M_i à M sont d'un ordre d'infinitude supérieur ou égal à un par rapport à un infiniment petit ρ, et de plus l'ellipse centrale d'inertie de ces n points est, amplifiée par une homothétie de rapport $1/\rho$, *un cercle de centre* M *à la limite*. Pour abréger je nommerai régulière une telle suite de points : par exemple si les M_i forment un polygone régulier de centre M de rayon ρ, leur suite est régulière.

Prenant M comme origine des coordonnées rectangulaires, les conditions de régularité d'une suite de points M_i sont

$$MM_i = O(\rho); \quad \Sigma x_i^2 - \Sigma y_i^2 = o(\rho^2); \quad \Sigma x_i y_i = o(\rho^2);$$
$$\Sigma x_i = o(\rho^2); \quad \Sigma y_i = o(\rho^2);$$

---

(1) *Rendic. Palermo*, 19, 1905, p. 142.

ou encore, introduisant l'affixe de M_i, $z_i = x_i + iy_i$,

$$(A) \qquad z_i = O(\rho); \quad \Sigma z_i = o(\rho^2); \quad \Sigma z_i^2 = o(\rho^2).$$

Soit alors Δ l'opérateur défini par

$$\Delta f = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\rho^2}[\mu(f) - f(M)],$$

$\mu(f)$ étant la valeur moyenne de f sur les M_i.

On vérifie immédiatement que Δ a les propriétés suivantes : 1° il est linéaire; 2° $\Delta = 0$ si f est harmonique, en vertu de (A); 3° en un point où f est maxima $\Delta \leq 0$; 4° enfin la classe des fonctions continues dans un cercle, nulles sur la circonférence, et telles que $\Delta \geq k > 0$ dans le cercle, n'est pas vide; il suffit par exemple de prendre $f = k(x^2 + y^2 - R^2)$, si $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ est l'équation du cercle, car $\Delta f = k$.

Dans ces conditions le raisonnement de Schwarz se transpose exactement, et $\Delta f = 0$ est une propriété *caractéristique* d'une fonction harmonique.

2. Il reste à montrer que les conditions (A) sont invariantes par transformation conforme. Tout d'abord on peut se borner aux transformations conformes directes, car une symétrie n'altère pas évidemment les conditions (A).

Or une transformation conforme directe est réalisée par une fonction holomorphe de z au voisinage de M. Si ζ est l'affixe d'un point transformé d'un point d'affixe z, les origines se correspondant, il existe entre ces nombres la relation

$$\zeta = az + bz^2 + o(z^2),$$

au moyen de cette relation et des conditions (A) on vérifie bien que

$$\zeta_i = O(\rho), \qquad \Sigma\zeta_i = o(\rho^2), \qquad \Sigma\zeta_i^2 = o(\rho^2),$$

c'est-à-dire que les conditions (A) sont satisfaites pour les points transformés des M_i. L'opérateur Δ se change en $|a|^{-2}\Delta$, et la condition $\Delta = 0$ est bien invariante par transformation conforme.

3. Étant donnée une fonction de deux variables complexes $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, on sait que l'on nomme biharmonique la partie réelle d'une telle fonction. C'est une fonction des quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2, vérifiant un système différentiel (D) bien connu. J'appellerai régulière une suite de points M_i tendant vers un point M si les conditions suivantes sont réalisées : les distances des M_i à M sont d'un ordre d'infinitude supérieur ou égal à un par rapport à un infiniment petit ρ, et de plus, la quadrique (à trois dimensions) d'inertie centrale de ces n points, amplifiée dans le rapport $1/\rho$,

est coupée suivant un cercle de centre M, à la limite, par tout plan caractéristique issu de M (cercle qui d'ailleurs se projette orthogonalement suivant un cercle sur tout autre plan caractéristique). Les conditions pour qu'une suite soit régulière sont

$$\mathrm{MM}_i = \mathrm{O}(\rho); \quad \Sigma x_1 = o(\rho^2), \ \ldots; \ \Sigma x_1^2 - \Sigma y_1^2 = o(\rho^2);$$
$$\Sigma x_2^2 - \Sigma y_2^2 = o(\rho^2); \quad \Sigma x_1 y_1 = o(\rho^2); \quad \Sigma x_2 y_2 = o(\rho^2);$$
$$\Sigma x_1 x_2 - \Sigma y_1 y_2 = o(\rho^2); \quad \Sigma x_1 y_2 + \Sigma x_2 y_1 = o(\rho^2).$$

Ces conditions peuvent se condenser en

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} z_i = \mathrm{O}(\rho); \quad \Sigma z_1 = o(\rho^2); \quad \Sigma z_2 = o(\rho^2); \quad \Sigma z_1^2 = o(\rho^2); \\ \Sigma z_2^2 = o(\rho^2); \quad \Sigma z_1 z_2 = o(\rho^2). \end{cases}$$

L'opérateur Δf sera défini d'une manière analogue, et jouit des mêmes propriétés que pour le cas du plan. En particulier $\Delta f = 0$ *caractérise* les fonctions biharmoniques.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les transformations pseudo-conformes admettant un point frontière invariant.* Note de M. **Sylvain Wachs**, présentée par M. Paul Montel.

Pour étudier les transformations pseudo-conformes (que nous désignerons par T. P.), M. Bergmann (1) attache à chaque domaine $\mathcal{B}$ une fonction $\mathrm{K}_{\mathcal{B}}$ à l'aide de laquelle il définit une métrique hermitienne donnée par $ds^2_{\mathcal{B}}(z_1 z_2) = \Sigma \mathrm{T}_{m\bar{n}}\, dz_m d\bar{z}_n$, $\mathrm{T}_{m\bar{n}} = \partial^2 \operatorname{Log} \mathrm{K}_{\mathcal{B}} / \partial z_m \partial \bar{z}_n$, ($\mathrm{B}_1$, p. 5) et montre que pour certains domaines particuliers, par exemple un bicylindre $\mathcal{B}$, on a $ds^2_{\mathcal{B}}(w_1 w_2) \leq ds^2_{\mathcal{B}}(z_1 z_2)$ si la T. P. $\mathbf{W} = w_k(z_1 z_2)$ $(k = 1, 2)$ change $\mathcal{B}$ en $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ (B_3, p. 13). De plus, M. Bergmann prouve que pour certaines questions concernant l'étude des T. P., on peut remplacer le voisinage d'un point frontière Q appartenant à un domaine $\mathcal{B}$ par le voisinage du même point appartenant à un domaine plus simple (méthode des domaines de comparaison, B_1, p. 13).

Nous avons déjà étudié (2) une catégorie de points frontières admettant des domaines de comparaison obtenus par T. P. à partir d'une hyper-

---

(1) Voir *J. de Crelle*, **169**, 1932, p. 1-40; **172**, 1934, p. 89-128; *Math. Zeitschr.*, **39**, 1934, p. 76-94 et 605-608; *C. R. de l'U. R. S. S.*, **16**, 1937, p. 11-14 (nous désignons respectivement ces travaux par B_1, B_2, B_3).

(2) S. Wachs, *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 1352-1354.

sphère. En appliquant des méthodes analogues, nous étudions ici une autre catégorie de points frontières d'un domaine $\mathcal{B}$ sur lequel nous ferons les hypothèses suivantes :

1° $\mathcal{B}$ est tout entier à distance finie;

2° La frontière de $\mathcal{B}$ comprend un morceau d'une hypersurface analytique

$$i^3 = \mathsf{E}[Z_1 = h(Z_2, \lambda),\ (0 < \lambda < 2\pi),\ \infty > A \geqq |h'_\lambda(Z_2, \lambda)| \geqq \alpha > 0] \quad (^3),$$

$h(Z_2, \lambda)$ représentant, pour toute valeur de λ, une fonction analytique de Z_2 définie dans un domaine assez grand. i^3 est l'ensemble réunion de morceaux de surfaces analytiques $\mathcal{J}^2(\lambda)$ (B₃, p. 79-83).

3° Q est un point intérieur à $\mathcal{J}^2(\lambda^0)$, $0 < \lambda^0 < 2\pi$. Par la transformation $z_1 = [h(Z_2, \lambda^0) - Z_1]/ih'_\lambda(Z_2, \lambda^0)$, $z_2 = Z_2$, nous introduisons de nouvelles coordonnées dites coordonnées normales par rapport à $\mathcal{J}^2(\lambda^0)$ (B_3, p. 605) : $\mathcal{J}^2(\lambda^0)$ sera située dans le plan $z_1 = 0$, et nous supposerons que si le point $\{\gamma\} \subset \overline{\mathcal{J}^2(\lambda^0)}$, on aura aussi pour le point $\{0, \gamma\} : \{0, \gamma\} \subset \overline{\mathcal{B}}$.

4° Pour chaque domaine $\overline{\mathcal{J}^{\star(2)}} \subset \mathcal{J}^2(\lambda^0)$, il existe des nombres $\mu > 0$, $\omega_0 > 0$ et $k < \infty$ tels que la courbe frontière $\mathcal{G}^1(\gamma)$ de l'intersection $\mathcal{B}.\mathsf{E}[z_2 = \gamma]$, $\gamma \subset \overline{\mathcal{J}^{\star 2}}$ peut être représentée, au voisinage de $z_1 = 0$, en coordonnées polaires par $r = r(\omega)$, $\pi - \omega_0 < \omega < \omega_0 + \pi$, $|r(\omega)| > \mu$, $|r''(\omega)| < k$ [le pôle étant le point $z_1 = 1$, et l'axe polaire, la normale intérieure à $\mathcal{G}^1(\gamma)$ au point Q];

5° Il existe un nombre $\theta > 0$ tel que les bicylindres

$$\mathsf{E}[|z_1 + \theta| < \theta,\ |z_2 - \gamma| < \theta]$$

soient extérieurs à $\mathcal{B}$ quel que soit le point γ de la frontière de $\mathcal{J}^2(\lambda^0)$.

Dans ces conditions, on démontre que $\mathcal{B}$ admet au point Q des bicylindres comme domaines de comparaison extérieur et intérieur, Q n'appartenant pas aux surfaces remarquables de ces bicylindres.

On obtient alors les théorèmes suivants, où le point Q est l'origine des coordonnées $z_1 z_2$ normales par rapport à $\mathcal{J}^2(\lambda^0)$.

Théorème I. — *Étant donné un domaine $\mathcal{B}$ satisfaisant aux hypothèses précédentes, un point $Q \in \mathcal{J}^2(\lambda^0)$ et une* T. P. $\mathbf{W} = w_k(z_1 z_2)$, $(k = 1, 2)$ *laissant fixe* Q *et changeant $\mathcal{B}$ en $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$, s'il existe une suite dénombrable de points $\{z_1^{(n)} z_2^{(n)}\}$ convergeant vers* Q *et telle que l'expression* $L_1^{(n)} = F(z_1^{\star(n)})/F(w_1^{\star(n)})$ *tende vers une limite finie et positive* Γ_1 *lorsque* n

---

(³) La notation $\mathsf{E}[\ldots]$ représente l'ensemble des points satisfaisant aux relations écrites dans le crochet.

augmente indéfiniment, on a en tout point $(z_1 z_2)$ *suffisamment voisin de* Q *l'inégalité*

$$\Gamma_1 \frac{F(z_1^*)}{|z_1^*|^2} \geq \frac{F(w_1^*)}{|w_1^*|^2}$$

en posant

$$F(u) = u + \bar{u} - u\bar{u}; \qquad z_1^* = \frac{z_1}{r_1}, \qquad w_1^* = \frac{w_1}{w_1 + r_2}$$

(*où* $\bar{u}$ *désigne le conjugué de* u *et où* r_1, r_2 *sont des nombres positifs ne dépendant que du domaine* $\mathcal{B}$).

Théorème II. — *Dans les mêmes conditions qu'au théorème précédent en remplaçant* $L_1^{(n)}$ *par* $L_2^{(n)} = F(z_1'^{*(n)})/F(w_1'^{*(n)})$ *et* Γ_1 *par* Γ_2; *si l'on suppose en outre qu'il existe à l'intérieur de* $\mathcal{G}$ *un bicylindre* $\mathcal{E} = \mathbf{E}[|z_1 - \rho_1| < \rho_1,\ |z_2| < \rho_2]$, *on a en tout point* $(z_1 z_2)$ *suffisamment voisin de* Q *l'inégalité*

$$\Gamma_2 \frac{F(z_1'^*)}{|z_1'^*|^2} < \frac{F(w_1'^*)}{|w_1'^*|^2}$$

en posant $z_1'^* = z_1/(z_1 + r_2)$, $w_1'^* = w_1/\rho_1$.

Théorème III. — *Sous les hypothèses des deux théorèmes précédents et en supposant de plus que la* T. P. **W** *change le domaine*

$$\mathcal{C}_{mpq}^{(z)} = \mathbf{E}\left[0 < z_1 + \bar{z}_1 < m,\ \frac{|z_1|}{z_1 + \bar{z}_1} < p,\ |z_2| < q\right]$$

dans un domaine intérieur au domaine

$$\mathcal{C}_{m'p'q'}^{(w)} = \mathbf{E}\left[0 < w_1 + \bar{w}_1 < m',\ \frac{|w_1|}{w_1 + \bar{w}_1} < p',\ |w_2| < q'\right],$$

le jacobien de la transformation **W** *est borné supérieurement et inférieurement en tout point du domaine* $\mathcal{C}_{mpq}(z)$ *par des quantités ne dépendant que de* $m, p, q, m', p', q', \Gamma_1, \Gamma_2$ *et du domaine* $\mathcal{B}$.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur les équations indépendantes de la théorie du photon.* Note [1] de M. **Bernard Kwal**, transmise par M. Louis de Broglie.

La théorie du photon de M. L. de Broglie [2] fait intervenir 31 équations, auxquelles satisfont les 16 composantes du champ photonique. Ces

---

(1) Séance du 24 avril 1939.

(2) *Actualités scient. et ind.*, nos 181 et 411; J. Géhéniau, *ibid.*, n° 778; *Mécanique ondulatoire de l'électron et du photon* (Thèse, Bruxelles. 1938).

équations se divisent en deux groupes, le premier se rapportant uniquement aux grandeurs maxwelliennes (tenseur antisymétrique H, E et le potentiel quadrivecteur A), tandis que le second, aux grandeurs non maxwelliennes (scalaire I, pseudo-scalaire $\mathcal{J}$ et pseudo-quadrivecteur Q).

Or on peut remarquer que, parmi les 31 équations du photon, il n'y en a que 16 qui sont indépendantes. Ce sont les équations

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{rot} H - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} + k^2 A = 0, & -\operatorname{rot} A + H = 0, \\ -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} + k^2 Q_4 = 0, & I = 0, \\ -\operatorname{grad} \mathcal{J} + k^2 Q = 0, & \operatorname{grad} A_4 + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A}{\partial t} + E = 0, \\ \operatorname{div} E + k^2 A_4 = 0, & -\operatorname{div} Q + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial Q_4}{\partial t} + \mathcal{J} = 0. \end{array}\right.$$

Les autres équations de la théorie du photon sont la conséquence immédiate de celles-ci.

Il semble, dans ce cas, intéressant de formuler la théorie du photon de manière à ne faire intervenir que les équations indépendantes. Pour ce faire, nous allons envisager une fonction Ψ à 16 composantes (H_1, H_2, H_3, I, E_1, E_2, E_3, $\mathcal{J}$, ikA_1, ikA_2, ikA_3, ikQ_4, ikQ_1, ikQ_2, ikQ_3, ikA_4), ainsi que les matrices suivantes (matrices quaternionniennes, tronquées) [3] :

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \varepsilon_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \varepsilon'_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \varepsilon'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \varepsilon'_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \end{array}\right.$$

A l'aide de ces matrices, ainsi que les matrices unité et zéro, nous formons les matrices à 16 lignes et à 16 colonnes qui figurent dans l'équation

$$(\mathrm{III})\quad \left\{ \begin{vmatrix} \varepsilon_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon'_l \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_l} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + ik \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\} \Psi = 0,$$

équation qui est équivalente aux équations (I).

([3]) B. Kwal, *Journal de Physique*, 5, 1934, p. 446; *Bull. Sc. Math.*, 59, 1935, p. 328.

Si nous appliquons, à gauche de (III), l'opérateur

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \varepsilon'_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_h \\ \varepsilon'_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_h & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_h} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},$$

nous obtenons, compte tenu des relations $\varepsilon'_h \varepsilon_l + \varepsilon'_h \varepsilon_l = 0$,

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{vmatrix} \varepsilon'_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon'_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_h \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \right\} \Psi = 0,$$

ce qui nous fournit les 16 équations restantes de la théorie du photon.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur l'équation linéaire du second ordre et les systèmes différentiels.* Note de M. **René Reulos**, présentée par M. Louis de Broglie.

Considérons l'équation linéaire du second ordre à quatre variables

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

qui est *supposée vérifiée par quatre fonctions d'ondes* $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$. Cela fait en tout quatre équations scalaires que l'on peut grouper en une seule équation matricielle conservant la même forme, ψ représentant alors la matrice à quatre lignes et une seule colonne ayant pour termes $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$ (énoncés de haut en bas). On sait que cette équation comprend, parmi ses solutions, celles de l'équation linéaire du premier ordre

$$(2) \qquad a_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \frac{b}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

a_1, a_2, a_3 et b étant des matrices à quatre lignes et quatre colonnes, vérifiant les relations

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = \pm 1, \qquad b^2 = \pm 1, \qquad a_1 b = b a_1, \qquad a_2 b = b a_2, \qquad a_3 b = b a_3,$$
$$a_1 a_2 + a_2 a_1 = 0, \qquad a_2 a_3 + a_3 a_2 = 0, \qquad a_3 a_1 + a_1 a_3 = 0.$$

Le premier membre de (2) est alors une matrice à quatre lignes et une

seule colonne, dont l'annulation entraîne celle de ses quatre coefficients, ce qui donne un système de quatre équations scalaires, linéaires et du premier ordre, dont la forme dépend du choix des matrices $a_1\,a_2\,a_3$ et b. Nous considérons les seize matrices

	α.	β.	γ.	δ.
1.	+ . . .	. . . +	. . + .	. + . .
	. + . .	. . + .	. . . +	+ . . .
	. . + .	. + . .	+ . . .	. . . +
	. . . +	+ . . .	. + . .	. . + .
2.	+ . . .	. . . +	. . − .	. − . .
	. − . .	. . − .	. . . +	− . . .
	. . − .	. − . .	− . . .	. . . +
	. . . +	+ . . .	. + . .	. . + .
3.	− . . .	. . . −	. . − .	. + . .
	. + . .	. . − .	. . . −	− . . .
	. . − .	. + . .	+ . . .	. . . −
	. . . +	+ . . .	. + . .	. . + .
4.	− . . .	. . . −	. . + .	. − . .
	. − . .	. . − .	. . . −	+ . . .
	. . + .	. + . .	− . . .	. . . −
	. . . +	+ . . .	. + . .	. . + .

Que nous appelons : $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1\,\delta_1$ pour la première ligne, $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2\,\delta_2$ pour la deuxième, etc. Les signes $+$ et $-$ représentent les nombres $+1$ et -1, les points figurent les zéros. On voit alors que ces matrices viennent se ranger en deux classes : les α, les β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1, δ_2, qui ont pour carré la matrice unité (que nous avons appelée α_1), et les autres dont le carré est égal à -1. Il résulte, d'autre part, d'une étude systématique sur les propriétés commutatives de ces matrices, que l'on obtient des systèmes différentiels *symétriques par rapport aux variables* x_1, x_2, x_3. en prenant pour $a_1\,a_2\,a_3$ et b, l'un quelconque des huit groupes de matrices

$$(-\gamma_2, \beta_1, \alpha_4; i\delta_3), \quad (\gamma_1, -\beta_2, \alpha_4; -i\delta_4). \quad (\beta_4, \gamma_4, \delta_4; -i\alpha_1), \quad (\beta_3, \gamma_3, \delta_3; i\alpha_1),$$
$$(\delta_1, \alpha_3, -\beta_2; i\gamma_3), \quad (-\delta_3, \alpha_3, \beta_1; -i\gamma_4). \quad (\alpha_2, -\delta_2, \gamma_1; i\beta_3), \quad (\alpha_2, \delta_1, -\gamma_2; -i\beta_4)$$

avec $i=\sqrt{-1}$. Le premier membre de l'équation (2) peut être considéré comme le produit symbolique de la *matrice* ψ par l'opérateur

$$a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial}{\partial x_2}+a_3\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{b}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}. \tag{3}$$

Celui-ci prend une forme particulière pour chaque groupe; prenons par

exemple le troisième, l'équation (2) s'écrira

$$(4)\quad \begin{vmatrix} -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & -\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3} = \varepsilon\frac{\partial\psi_4}{\partial x_1} + \frac{i}{c}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} = \varepsilon\frac{\partial\psi_4}{\partial x_2} + \frac{i}{c}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = \varepsilon\frac{\partial\psi_4}{\partial x_3} + \frac{i}{c}\frac{\partial\psi_3}{\partial t}, \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_4} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} = \varepsilon\frac{i}{c}\frac{\partial\psi_4}{\partial t} \end{array} \right.$$

avec $\varepsilon = +1$. L'opérateur (3) admet ainsi huit formes équivalentes, correspondant aux huit combinaisons énumérées ci-dessus; toutes conduisent au système ci-dessus. $\varepsilon = +1$ pour les groupes 1, 3, 5, 7, $\varepsilon = -1$ pour les groupes 2, 4, 6, 8. Les fonctions ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 sont alors des quantités complexes, posons

$$\psi_k = A_k + iB_k \quad (k = 1, 2, 3) \qquad \text{et} \qquad \psi_4 = U + iV,$$

A_k et B_k peuvent être considérés comme les composantes de deux vecteurs A et B suivant trois directions rectangulaires. Séparons alors les quantités affectées du symbole i, qui sont manifestement d'une espèce différente, nous obtenons ainsi deux groupes d'équations que nous écrirons sous la forme vectorielle

$$\text{rot}\,A = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \pm \text{grad}\,U, \qquad \text{div}\,A \mp \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} = 0;$$

$$\text{rot}\,B = \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \pm \text{grad}\,V, \qquad \text{div}\,B \pm \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Ces équations, qui *généralisent les équations de Maxwell*, sont précisément celles qui lient le potentiel scalaire électrique U et le potentiel vecteur électrique A au potentiel scalaire magnétique V et au potentiel vecteur magnétique B. U et B s'identifient avec les potentiels de Lorentz; V et A représentent alors un groupe symétrique, déjà envisagé par M. Louis de Broglie sous le nom d'*antipotentiels* [1].

Si l'on prend $\psi_4 = 0$, on retrouve les équations de Maxwell et les équations de divergence, qui sont ainsi contenues dans l'équation (2) et dans chacune des huit équations matricielles du type (4). Les A_k et les B_k sont alors les composantes du *vecteur électromagnétique complexe* $P = A + iB$, que nous avons déjà utilisé pour l'intégration de ces équations [1].

---

(1) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 423.

SPECTROSCOPIE. — *Sur l'existence de la phosphorescence de l'oxygène dans le spectre du ciel nocturne*. Note [1] de M. **Lewi Herman** et Mme **Renée Herman**, présentée par M. Charles Fabry.

I. Le rayonnement du fond du ciel nocturne contient, en dehors de raies et de bandes, un spectre continu dans le vert et dans le bleu. Les enregistrements au microphotomètre montrent entre 4900 et 3940 Å environ un fond continu intense qui n'est pas dû exclusivement à la superposition des émissions discontinues [2]. On a attribué ce rayonnement au moins en partie à une diffusion de la lumière des étoiles dans la galaxie. Nous pensons que l'on pourrait en outre envisager une émission continue atmosphérique analogue à celle que l'on observe dans un mélange d'oxygène et d'azote.

II. Afin d'examiner une ressemblance possible nous avons repris l'étude de cette phosphorescence bien connue. Dans une décharge, non redressée et interrompue, passant dans un ballon à électrodes rempli d'azote sous une pression de un à deux millimètres de mercure, l'on observe deux stades de phosphorescence : le stade vert et le stade bleu vert. Le premier, très brillant, de coloration vert jaunâtre et de courte durée (fraction de seconde), correspond à un fort pourcentage d'oxygène. Le second, beaucoup moins brillant, de coloration vert bleuâtre, dure plusieurs secondes et se développe lorsque la pression partielle de l'oxygène diminue. Dans le spectre d'émission du dernier stade (*fig*. 1), on distingue, dans le violet et l'ultraviolet proche, une bande continue M, différente de la partie verte et rouge. Cette bande s'étend jusqu'à 25820 cm^{-1} environ, où elle présente une limite nette L obtenue par surexposition (*fig*. 2).

III. La phosphorescence de l'oxygène a été attribuée à deux origines différentes : soit à l'action des molécules métastables d'azote $N^2\,A\,{}^3\Sigma_u^+(v=0)$ sur NO^2 [3], soit à l'action de O^3 sur NO [4]. Le processus semble dû au moins à 2 molécules distinctes. Une autre indication de la complexité du phé-

---

[1] Séance du 24 avril 1939.

[2] J. Dufay, *Étude de la lumière du fond du ciel nocturne*, Paris, 1934.

[3] L. Grillet et P. M. Duffieux, *Journal de Physique*, 8e série, 10, 1939, p. 82.

[4] E. M. Stoddart, *Proc. Roy. Soc. London*, 153, 1935, p. 152. On y trouvera des références.

nomène résulte de la variation de la phosphorescence avec le temps ([5]). Cette variation qui présente une sorte de palier indiquerait que la diminution de la phosphorescence due au processus du début est accompagnée d'une formation de molécules ou atomes présentant à leur tour une phosphorescence distincte de la première. Le premier processus aboutirait par exemple à la formation de NO([3]). Le second correspondrait alors à l'excitation de NO dans un choc triple avec les molécules métastables d'azote :

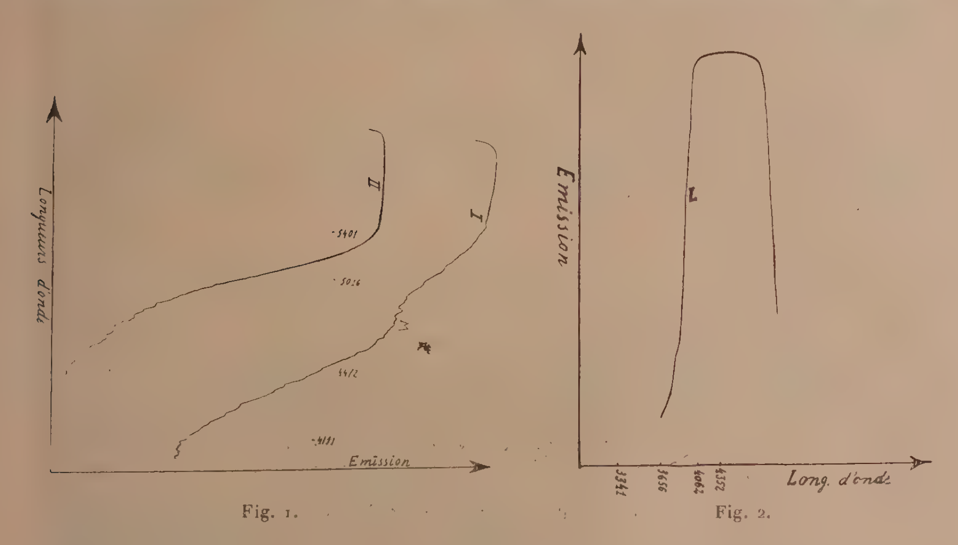


Fig. 1. Fig. 2.

$$2\,\mathrm{NO} + \mathrm{N}^2\,\mathrm{A}\,{}^3\Sigma_u^+(v = 0,\ 1,\ 2) \rightarrow 2\,\mathrm{NO}^* + \mathrm{N}^2\,\mathrm{X}\,{}^1\Sigma_g^+.$$

La molécule excitée NO^* fournirait ensuite une émission par passage au niveau fondamental. Dans ces conditions, la limite vers les courtes longueurs d'onde doit être inférieure à $1/2\,\mathrm{N}^2\,\mathrm{A}\,{}^3\Sigma_u^+(v = 2)$, soit à 26300 cm^{-1} environ. Ceci semble en bon accord avec la limite observée. L'existence des molécules métastables aux niveaux de vibration $v = 1$, 2 provient soit de l'émission du premier groupe positif (bandes $B_6 \rightarrow A_2$; $B_7 \rightarrow A_3$ les plus intenses), soit de l'excitation des premiers niveaux de vibration par chocs pendant la décharge.

IV. La présence des molécules métastables d'azote $\mathrm{A}\,{}^3\Sigma_u^+$ aux niveaux $v = 0$, 1, 2, 3 dans l'atmosphère ([6]) rend donc très vraisemblable l'existence de

---

([5]) G. Herzberg, *Zeitschr. f. Physik*, **46**, 1928, p. 878.

([6]) J. Cabannes et J. Dufay, *Comptes rendus*, **200**, 1935, p. 1504.

la phosphorescence de l'oxygène dans le spectre du fond du ciel nocturne. Ceci est en accord, d'une part avec la limite du spectre continu vers les courtes longueurs d'onde observées habituellement, et d'autre part avec l'existence du système de bandes d'intercombinaison $A\,^3\Sigma_u^+ \rightarrow X\,^1\Sigma_g^+$ de l'azote dans le ciel nocturne.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Calcul relatif aux conditions éventuelles de transmutation en chaîne de l'uranium.* Note de M. **Francis Perrin**, transmise par M. Jean Perrin.

L'émission de neutrons lors de la rupture de noyaux d'uranium provoquée par l'absorption de neutrons a permis pour la première fois de concevoir un mécanisme de réaction nucléaire en chaîne [1].

Si le nombre moyen ν_0 de neutrons émis par neutron absorbé dans l'uranium est supérieur à 1, ce qui paraît très probable à l'heure actuelle [2], les chaînes pourront être ramifiées et aboutir à la transmutation de quantités pondérables d'uranium libérant une énergie énorme.

Nous ne discuterons que les réactions produites par des neutrons rapides. Nous pourrons ainsi admettre que les sections efficaces des noyaux pour les neutrons sont indépendantes de leur vitesse.

Nous supposerons que l'uranium, ou le composé utilisé, occupe une sphère de rayon R au centre de laquelle est une source émettant Q_0 neutrons par seconde. Nous désignerons par n le nombre d'atomes d'uranium par unité de volume, par s_d et s_a les sections efficaces de diffusion et d'absorption de leurs noyaux pour les neutrons rapides, et par n_i, s_{di}, s_{ai} les mêmes quantités pour les autres espèces d'atomes présents.

Soient $F(r, t)$ la densité totale en neutrons, $\bar{v}(r, t)$ leur vitesse moyenne, et $\Phi = F\bar{v}$. Si les sections efficaces de diffusion sont grandes par rapport à celles d'absorption, et si le libre parcours moyen

$$\lambda = \frac{1}{n s_d + \sum n_i s_{di}}$$

est assez petit par rapport à R, on peut admettre que les neutrons de

(1) H. von Halban, F. Joliot, L. Kowarski, *Nature*, **143**, 1939, p. 470; Ch. Haenny, A. Rosenberg, *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 898; M. Dodé, H. von Halban, F. Joliot, L. Kowarski, *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 995.

(2) H. von Halban, F. Joliot, L. Kowarski, *Nature*, **143**, 1939, p. 680.

vitesse v diffusent dans la masse avec un coefficient $D = 1/3\lambda v$, et que la densité totale en neutrons obéit à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\lambda}{3}\Delta(\bar{v}F) + [n(\nu_0 - 1)s_a - \Sigma n_i s_{ai}]\bar{v}F.$$

Pour que la réaction en chaîne ramifiée soit possible, il faut que le coefficient de F soit positif; supposant qu'il en est ainsi nous poserons

$$a^2 = \frac{3}{\lambda}[n(\nu_0 - 1)s_a - \Sigma n_i s_{ai}].$$

En régime stationnaire, on aura

$$\Delta\Phi + a^2\Phi = 0,$$

avec une symétrie sphérique; le flux total de neutrons devant être égal à Q_0 au voisinage du centre, et Φ devant s'annuler sur la sphère de rayon R, on obtient

$$\Phi = \frac{3Q_0}{4\pi\lambda}\frac{1}{\sin aR}\frac{\sin a(R - r)}{r}.$$

Le rapport du flux sortant au flux émis par la source est

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{aR}{\sin aR},$$

et l'énergie totale dégagée dans la sphère a pour expression, w étant l'énergie dégagée en moyenne par neutron absorbé par l'uranium,

$$W = w\frac{ns_a}{n(\nu_0 - 1)s_a - \Sigma n_i s_{ai}}(Q - Q_0).$$

Le flux sortant et l'énergie dégagée deviennent infinis (comme l'inverse de $R_c - R$) quand R atteint la valeur critique

$$R_c = \frac{\pi}{a}.$$

La réaction en chaîne serait explosive à partir de cette valeur du rayon. Dans l'oxyde U^3O^8 en poudre (densité 4,2) on a $\lambda = 10^{cm}$ ($s_d = 6.10^{-24}$ pour U, et $s_{di} = 2.10^{-24}$ pour O); en admettant $s_a = 10^{-25}$ cm² et $\nu_0 = 3$, et négligeant l'absorption par l'oxygène, on trouve $1/a \simeq 40^{cm}$, donc $R_c \simeq 130^{cm}$, d'où une masse critique M_c de 40 tonnes.

On peut diminuer beaucoup la masse d'uranium nécessaire pour produire la réaction explosive en l'entourant d'une couche diffusante, d'épaisseur L,

faite avec un élément absorbant peu les neutrons rapides (fer, plomb, etc.). Posant

$$b^2 = 3\,n'^2 s'_d s'_a, \qquad \lambda' = \frac{1}{n' s'_d},$$

les lettres accentuées étant relatives au diffuseur, on trouve que le rayon critique est donné par

$$1 - a\mathrm{R}\cot a\mathrm{R} = \frac{\lambda'}{\lambda}(1 + b\mathrm{R}\coth b\mathrm{L}).$$

Admettant pour le fer $s'_d = 3 . 10^{-24}$ et $s'_a = 0{,}5 . 10^{-25}$, et prenant $\mathrm{L} = 35^{\mathrm{cm}}$, on trouve $a\mathrm{R}_c = 2{,}15$, d'où $\mathrm{M}_c \simeq 12$ tonnes.

Il n'apparaît pas facile, dans le cas des chaînes par neutrons rapides, de maîtriser le dégagement d'énergie qui serait produit par la transformation massive de l'uranium. Mais, si les chaînes ramifiées peuvent se produire avec des neutrons thermiques (ralentis par un composé hydrogéné), l'élévation de température modifiant les sections efficaces, des conditions de fonctionnement stable existeront sans doute (cette possibilité est aussi suggérée indépendamment par F. Adler et H. von Halban).

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Sur la capture simple des neutrons thermiques et des neutrons de résonance par l'uranium.* Note [1] de MM. **Hans von Halban** jun., **Lew Kowarski** et **Paul Savitch**, présentée par M. Aimé Cotton.

Les travaux récents sur la partition nucléaire de l'uranium [2] et sur la libération de neutrons qui en résulte [3] ont fourni des renseignements quantitatifs dont la discussion exige la possession de données précises sur la capture simple, par l'uranium, des neutrons thermiques et des neutrons de résonance (d'énergie voisine de 25 volts) [4]. Nous rappelons que ce

---

(1) Séance du 24 avril 1939.

(2) I. Curie et P. Savitch, *Journ. de Phys. et Radium*, **9**, 1938, p. 355; O. Hahn et F. Strassmann, *Naturwiss.*, **27**, 1939, p. 11; F. Joliot, *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 341, et *Journ. de Phys. et Radium*, **10**, 1939, p. 159; L. Meitner et O. Frisch, *Nature*, **143**, 1939, p. 239; O. Frisch, *ibid.*, p. 276.

(3) H. von Halban jun., F. Joliot, L. Kowarski, *Nature*, **143**, 1939, p. 470 et 680; M. Dodé, H. von Halban jun., F. Joliot, L. Kowarski, *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 995; R. Roberts, R. Meyer, P. Wang, *Phys. Rev.*, **55**, 1939, p. 510.

(4) L. Meitner, O. Hahn, F. Strassmann, *Z. f. Phys.*, **106**, 1937, p. 249.

processus, tout à fait distinct de la capture conduisant à la partition, donne lieu à la formation d'un isotope de l'uranium (probablement $^{239}_{92}U$), qui se désintègre avec une période de 25 minutes en émettant des rayons β.

Nous avons cherché à déterminer la section efficace de l'uranium pour ce mode de capture des neutrons *thermiques*, en comparant l'activité produite dans l'uranium par une source déterminée de neutrons lents avec l'activité produite dans une feuille d'or par la même source et dans les mêmes conditions géométriques. On en déduit la valeur correspondante pour l'uranium d'après l'équation

$$\sigma_U^{th} = \sigma_{Au}^{th} \frac{I_U}{I_{Au}} \frac{\varepsilon_{Au}}{\varepsilon_U} \frac{A_U}{A_{Au}} \frac{m_{Au}}{m_U}$$

(I, activité d'une couche *infiniment épaisse* par rapport à la pénétration des rayons β, mesurée au compteur Geiger-Müller et ramenée à la fin d'irradiation saturante ; ε, épaisseur en g/cm² de l'écran qui réduit à moitié l'activité observée, l'absorption des rayons β étant considérée comme exponentielle; A, poids atomique; *m*, proportion en poids des atomes intéressés dans la substance irradiée).

L'activité I due aux neutrons thermiques représente la différence $I_1 - I_2$ de deux valeurs expérimentales : I_1 résulte de l'irradiation sans cadmium, c'est-à-dire par les neutrons thermiques + résonance, tandis que I_2 résulte de l'irradiation à travers le cadmium, c'est-dire par les neutrons de résonance seuls. Toutes les irradiations étaient faites à travers un écran (1 g/cm² U + 0,2 g/cm² Au) qui affaiblit les bandes de résonance correspondantes dans le rayonnement activant; on réduisait ainsi au minimum le terme I_2 et son influence sur la précision de I.

L'or était transporté de la source au compteur sans aucune opération intermédiaire, tandis que pour l'uranium il était nécessaire d'irradier des quantités relativement grandes (10g de peroxyde calciné) et de les traiter chimiquement afin d'éliminer les transuraniens et l'uranium X formé pendant l'irradiation ([5]); après ce traitement la substance était transportée sur le compteur sous la forme d'éprouvettes plates de dimensions standardisées. Étant donné la faible intensité de l'activité observée et la nécessité d'y distinguer deux fractions, dues respectivement à ^{239}U décroissant et à UX croissant, l'erreur sur I_U et, finalement, sur σ_U^{th} est considérable.

La détermination de l'absorbabilité des rayons β dans le cuivre nous a

---

([5]) O. HAHN, L. MEITNER et F. STRASSMANN, *Ber. d. Chem. Ges.*, 70, 1937, p. 1374.

donné $\varepsilon_{Au} = 0,036$ g/cm² et $\varepsilon_U = 0,059$ g/cm²; nous avons vérifié que l'épaisseur de l'écran réduisant l'activité au quart est sensiblement égale à 2ε.

En adoptant pour σ_{Au}^{th} la valeur $7,1.10^{-23}$ cm² déduite des mesures par absorption [6], nous trouvons $\sigma_U^{th} = (1,3 \pm 0,45).10^{-24}$ cm².

En ce qui concerne la capture des neutrons *de résonance*, la donnée intéressante est la largeur relative $\Delta E/E$ de la bande de résonance [6], [7], pouvant être définie plus directement comme la probabilité pour qu'un neutron initialement rapide tombe dans l'intervalle $(E, E + \Delta E)_{rés.}$ au cours de son ralentissement. Dans un milieu riche en uranium un tel neutron est presque certainement capturé par résonance avant qu'il ait le temps de subir un autre choc ralentissant qui fît tomber son énergie au-dessous de la bande de résonance. Une proportion p, voisine de $\Delta E/E$, de neutrons issus de la source est ainsi absorbée avant de parvenir à l'état thermique.

Nous avons déterminé p en mesurant l'activité produite dans une plaque d'or entourée de Cd (le domaine de sensibilité de ce détecteur se borne à une bande voisine de 3 volts) par des neutrons lents ayant passé à travers 2^{cm} d'une solution 1,6-molaire de $UO^2(NO^3)^2$. Cette solution est suffisamment riche en uranium pour obtenir l'absorption presque complète des neutrons tombés dans la bande de 25 volts, et son épaisseur est suffisante pour que seuls les neutrons qui entrent dans la solution avec une énergie supérieure à 25 volts puissent arriver au détecteur avec uue énergie tombant dans la bande détectable. Nous avons utilisé une source de 300^{mg} Ra (γ) + Be, noyée dans un bloc cubique de paraffine (un litre); l'expérience consistait à activer l'or d'une part à travers la solution d'uranyle, et d'autre part (afin de ne pas modifier les conditions géométriques) à travers le même volume d'une solution 1,6-molaire de nitrate d'ammonium. Le rapport des deux activités, mesurées à l'électromètre, était égal à $1 - p$.

Nous avons trouvé $p = 0,16 \pm 0,025$; c'est cette valeur (et non pas la valeur théorique $\Delta E/E$) qui est directement utilisable dans la discussion de l'absorption des neutrons lents dans la solution 1,6-molaire d'uranyle (v. Halban, Joliot et Kowarski, *loc. cit.*).

La largeur relative de la bande de résonance de l'uranium, ainsi déterminée, s'accorde assez bien avec celle que l'on peut tirer des considérations d'Amaldi et Fermi sur la *numérosité* et des mesures citées [4].

---

[6] E. AMALDI et E. FERMI, *Phys. Rev.*, 50, 1936, p. 899.

[7] H. VON HALBAN jun. et P. PREISWERK, *J. de Phys. et Radium*, 8, 1937, p. 29.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Théorie du titrage potentiométrique différentiel (acides et bases faibles).* Note [1] de M. **Léon Giraut-Erler**, transmise par M. Jean Perrin.

Nous avons étudié [2] la théorie du titrage potentiométrique différentiel pour les acides et bases forts. Dans la présente Note nous exposons le cas des acides et bases faibles.

I. *Titrage d'un acide monovalent, obéissant à la loi d'action de masse, par une base forte.* — On part des égalités connues $[H^+][OH^-] = k_e$; $[H^+]\ [A^-]/[HA] = k_a$; $[H^+] + [B^+] = [OH^-] + [A^-]$; $[HA] + [A^-] = AV/(V+v)$; $[B^+] = Bv/(V+v)$; où A, B, V et v ont les mêmes significations que précédemment [2]. Elles conduisent à une équation du troisième degré de résolution difficile. On a des équations faciles à résoudre en faisant telle ou telle approximation suivant le pH à tel ou tel moment du titrage, le k_a et les concentrations. D'où une série de formules donnant les courbes de neutralisation. Pour obtenir les formules donnant les courbes différentielles on procède de la même façon que précédemment [2]. S'il s'agit d'un acide *assez fort* (défini par un pH au point de neutralisation de 7,01 à 7,4), on a une série de formules que, vu l'étendue relativement restreinte de leur validité, nous n'estimons pas devoir reproduire ici. S'il s'agit d'un *acide faible* (défini par un pH au point de neutralisation de 7,4 à 12,4), on a les formules suivantes :

Du début du titrage à la neutralisation de la moitié droite, c'est-à-dire si $0 < v < v + \Delta v + RV$, on a

$$\Delta pH_1 = \log\frac{(v+\Delta v)(RV-v)}{v(RV-v-\Delta v)} - \left\{ \log\left[1+\sqrt{1+\frac{4k_e(v+\Delta v)(V+v+\Delta v)}{B\,k_a(RV-v-\Delta v)^2}}\right] - \log\left[1+\sqrt{1+\frac{4k_e v(V+v)}{B\,k_a(RV-v)^2}}\right]\right\}.$$

Cette formule n'est pas valable tout au début du titrage si $pH < 5$, car elle suppose $[H^+]$ négligeable devant $[HA] + [A^-] - [B^+]$ et devant $[B^+]$.

---

[1] Séance du 24 avril 1939.

[2] *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 1220.

A la neutralisation de la moitié droite ($v+\Delta v = \mathrm{RV}$),

$$\Delta \mathrm{pH}_2 = \frac{1}{2} pk_e - \frac{1}{2} pk_a + \frac{1}{2} \log \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}} + \log \frac{\mathrm{RV}-v}{v} - \left\{ \log 2 - \log \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4 k_e v (\mathrm{V}+v)}{\mathrm{B} k_a (\mathrm{RV}-v)^2}} \right] \right\}.$$

De la neutralisation de la moitié droite à celle de la moitié gauche ($v < \mathrm{RV} < v + \Delta v$),

$$\Delta \mathrm{pH}_3 = pk_e - pk_a + \log \mathrm{B} + \log \frac{(v+\Delta v - \mathrm{RV})(\mathrm{RV}-v)}{(\mathrm{V}+v+\Delta v) v} - \left\{ 2 \log 2 - \log \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4 k_e (v+\Delta v)(\mathrm{V}+v+\Delta v)}{\mathrm{B} k_a (v+\Delta v - \mathrm{RV})^2}} \right] - \log \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4 k_e v (\mathrm{V}+v)}{\mathrm{B} k_a (\mathrm{RV}-v)^2}} \right] \right\}.$$

A la neutralisation de la moitié gauche ($v = \mathrm{RV}$),

$$\Delta \mathrm{pH}_4 = \frac{1}{2} pk_e - \frac{1}{2} pk_a + \log \mathrm{B} - \frac{1}{2} \log \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}} + \log \frac{v+\Delta v - \mathrm{RV}}{\mathrm{V}+v+\Delta v} - \left\{ \log 2 - \log \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4 k_e (v+\Delta v)(\mathrm{V}+v+\Delta v)}{\mathrm{B} k_a (v+\Delta v - \mathrm{RV})^2}} \right] \right\}.$$

Après la neutralisation de la moitié gauche ($v > \mathrm{RV}$),

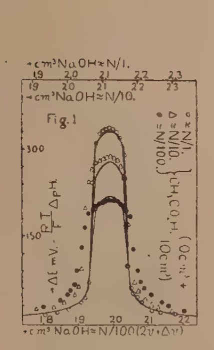
$$\Delta \mathrm{pH}_5 = \log \frac{(v+\Delta v - \mathrm{RV})(\mathrm{V}+v)}{(\mathrm{V}+v+\Delta v)(v-\mathrm{RV})} + \left\{ \log \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4 k_e (v+\Delta v)(\mathrm{V}+v+\Delta v)}{\mathrm{B} k_a (v+\Delta v - \mathrm{RV})^2}} \right] - \log \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4 k_e v (\mathrm{V}+v)}{\mathrm{B} k_a (v-\mathrm{RV})^2}} \right] \right\}.$$

Nous ne croyons pas devoir donner non plus les formules pour les *acides très faibles* (définis par un pH au point de neutralisation $> 12,4$), étant donné leur peu d'utilité pratique. On peut négliger les quantités entre $\{\ \}$ (effet des ions de l'eau) tant qu'il ne s'agit pas de points trop près des points de neutralisation des deux moitiés de la solution à titrer. Le *point maximum* est donné (sauf en solution très diluée) par

$$\Delta \mathrm{pH}_f = pk_e - pk_a + \log \mathrm{B} - \log \mathrm{R}(\mathrm{R}+1) - 2 \log \frac{2\mathrm{V}}{\Delta v}.$$

La largeur moyenne de la boucle est $2\Delta v$ si l'on porte en abscisses $2v + \Delta v$.

Nous avons essayé de vérifier ces formules de la même manière que précédemment ([2]). La figure 1 montre l'influence de la concentration. La



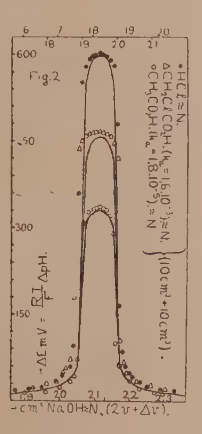


figure 2 montre l'influence de k_a. L'accord entre la théorie et l'expérience se montre satisfaisant.

II. *Titrage d'une base monovalente, obéissant à la loi d'action de masse, par un acide fort.* On remplace partout k_a par k_b, A par B, B par A, et l'on pose $R = B/A$.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Étude des spectres d'absorption infrarouge des solides par la méthode des poudres.* (*Acétates, formiates, oxalates, acétylacétonates, sulfates*). Note de MM. **Jean Lecomte** et **René Freymann**, présentée par M. Aimé Cotton.

Alors que l'étude, entre 6 et 20$^{\mu}$, des spectres d'absorption infrarouge des liquides et des gaz a été particulièrement développée, il y a eu jusqu'ici assez peu de recherches, dans ce domaine spectral, sur les substances solides à l'état pulvérulent. Nous voulons essayer de montrer ici que cette étude peut être effectuée, entre 6 et 20$^{\mu}$, avec la même facilité que l'examen des liquides.

Suivant une méthode analogue à celle utilisée dans l'ultraviolet ([1]), la

([1]) Mme T. Guilmart et R. Freymann, *Rev. Opt.*, 17, 1938, p. 199.

substance étudiée est finement broyée au mortier; puis, après passage à travers un fin tamis, elle est étalée sur une lame de sel gemme ou de bromure de potassium. Pour les substances hygroscopiques, on dépose une couche mince sur la lame de sel gemme par évaporation rapide d'une solution alcoolique concentrée du corps étudié. Les spectres d'absorption ont été enregistrés à l'aide d'appareils décrits précédemment par l'un de nous (²).

Cette méthode d'étude des poudres ne présente donc aucune difficulté spéciale; elle n'a d'ailleurs rien de nouveau et plusieurs auteurs, l'un de nous en particulier, l'ont utilisée (³). Il n'en est que plus curieux que, malgré sa simplicité, ce procédé n'ait pas été davantage employé entre 6 et 20^{μ} :

Il permet l'examen de substances que la fusion décomposerait; il s'applique également aux substances insolubles ou solubles seulement dans l'eau qui est opaque dans l'infrarouge moyen; le tableau ci-contre montre que *des composés, contenant de l'eau de cristallisation, peuvent même être étudiés ainsi. L'application de la méthode des poudres dans l'infrarouge offre certainement un champ de recherches très vaste, tant en chimie minérale qu'en chimie organique ou biologique.*

Parmi les divers composés que nous avons examinés par cette méthode, nous signalerons ici divers sels métalliques, *acétates, formiates, oxalates, acétylacétonates*. Si nous avons assez poussé l'examen des acétates, nous comptons développer encore celui des autres substances : nous donnons donc surtout le tableau ci-contre pour montrer les larges possibilités d'application de la méthode des poudres; nous renvoyons, pour une étude plus détaillée, ainsi que pour l'origine des bandes observées, à un Mémoire ultérieur. En outre nous attirons spécialement l'attention sur les *résultats fort différents obtenus pour les sulfates de cuivre anhydre et à* 5^{mol} *d'eau;* nous signalons également que les raies faibles 705-806-861 cm^{-1} sont sans doute dues à la combinaison des fréquences du réseau cristallin avec la fréquence 620 cm^{-1} de SO^4.

(²) J. Lecomte, *Comptes rendus*, **189**, 1929, p. 155; **196**, 1933, p. 1011.

(³) S. Tolksdorf, *Z. Phys. Chem.*, **132**, 1928, p. 161; A. M. Taylor, *Trans. Farad. Soc.*, **25**, 1929, p. 856; M. K. Sen et A. K. Sen Gupta, *Ind. J. Phys.*, **9**, 1935, p. 433; M. Parodi, *Thèse*, Paris, 1938; G. Conn et C. Wu, *Trans. Farad. Soc.*, **34**, 1938, p. 1483; Davies et Sutherland, *J. Chem. Phys.*, **6**, 1938, p. 755; P. Lambert et J. Lecomte, *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 1148.

Acétates

(cristallisés; contenant généralement une ou plusieurs molécules d'eau).

³COOH.....						*888*	**935**		**1012**	*1045*		**1256**	**1395**	1497		**1668**
....				**720**	*804*	851	*933*		**1025**	*1045*	*1127*			**1427**	**1555**	
....		**660**		**714**	**784**			**979**	**1030**	*1055*	*1114*			**1466**	*1575*	
....		...	...	...	...	...	*923*		**1018**	*1047*	*1133*			**1408**	**1527**	1613
....	624	**664**		**720**	**804**	847	*942*		**1020**	*1053*	*1124*			**1422**	**1515**	1658
....	...	...	...	...	...	...	**922**	968	**1013**	*1046*	*1120*			**1414**	**1543**	1618
....	614	**668**		**711**			**930**		**1012**	*1050*	*1117*			**1408**	**1508**	
....	*631*		**692**	*719*					**1031**		*1120*			**1420**	**1552**	
....	620		**689**	*719*			**949**		**1013**	*1050*	*1124*			**1427**	**1520**	
....	**617**	**650**		**716**			**927**		**1012**	*1050*	*1107*			**1408**	**1522**	1645
....	616	**662**		**721**			**936**		**1017**	*1047*	*1124*			**1416**	**1522**	1645
²..........		**664**	**689**	**717**	796		**936**		**1013**	*1050*	*1117*			*1393*	**1490**	1645

Formiates.

....	...	...	684		**772**					1055	1121		**1335**		**1550**	
....	...	...	684	*765*	*785*						1121		**1316**		**1543**	
....	...	...	685	*758*	*783*								*1321*		**1513**	

Oxalates.

) OH)²2H²O.			681	**717**					1016		*1117*	**1218**		1412	**1515**	*1631*
....		658	**686**		**780**	**833**	875	942	1021		*1105*		**1307**		**1592**	
I..........	...	...	...	711		**811**					*1117*	*1272*		1439	**1515**	**1592**
....		662	682	**717**	742 } 765 }	**818**			1031		*1112*		**1323** } *1370* }		**1538**	**1613**
....		*664*		*720*	**767**	831			1016		*1117*	*1238*		1406	**1520**	

Acétylacétonates.

....	...	...	...	...	*770*	*794*	821	922	**1010**		1101 } 1153 }	*1238*	**1361**		**1515**	1645
II..........	...	...	...	...	**766**	**797**		**920**	*1005*		1111	*1247*	**1353**		**1513**	1689
....	...	...	...	...	**766**			**930**	**1016**		1082 } 1174 }	*1247*		**1412**	1475	1610

Sulfate de cuivre.

ydre........				705	806	861	**956**		**1076**		*1174*
O..........				...	...	...		*990*	**1063**	**1101**	*1170*

Caractères gras, bande intense ou moyenne. Caractères italiques, bande faible.
Caractères ordinaires, bande très faible ou douteuse. ...., région non étudiée.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la formation de structures granulaires dans le domaine supérieur de transformation des aciers.* Note (¹) de MM. **Henri Jolivet** et **Albert Portevin**, présentée par M. Léon Guillet.

L'étude de la transformation au refroidissement de l'austénite au-dessous de sa zone de stabilité a conduit à distinguer trois domaines de transformation (Ar', Ar'', Ar''') [2].

La transformation dans le domaine supérieur Ar' a généralement été décrite comme donnant naissance à des *structures lamellaires*.

Les *caractères* de ces agrégats eutectoïdes (cémentite-ferrite) sont connus depuis longtemps : aux températures les plus élevées, les lamelles alternées de cémentite et de ferrite sont parallèles et aisément observables (perlite); lorsque la température s'abaisse, l'épaisseur des lamelles décroît, la structure devenant de plus en plus fine, et les lamelles ont tendance à prendre une orientation rayonnante (troostite).

Le *mode de formation* de ces structures est encore mal connu : leur développement s'effectue à partir des centres de transformation par accroissement de plages nodulaires. Lorsque ces centres donnent naissance à des plages à lamelles parallèles, chacune d'elles n'intéresse qu'un seul grain austénitique alors que les structures rayonnantes peuvent en intéresser plusieurs, fait qui laisserait supposer que les directions des lamelles sont en relation avec les directions cristallographiques de l'austénite.

Dans un certain nombre d'aciers alliés (au nickel-chrome ou au chrome-molybdène) de composition voisine de l'eutectoïde, pour lesquels les domaines supérieurs Ar' et intermédiaire Ar'' sont nettement séparés par une zone de stabilité relative de l'austénite, l'étude de la transformation isotherme dans le domaine Ar' permet de mettre en évidence, aux températures inférieures de ce domaine, des *structures granulaires* qui font suite aux structures lamellaires rappelées plus haut et présentent des caractères différents (*fig.* 1 et 2). La transition est progressive et s'effectue au voisinage du maximum de vitesse de la transformation.

Aux températures plus basses, les plages nodulaires sont constituées par un fond légèrement colorable aux réactifs acides ou oxydants, sur

---

(¹) Séance du 24 avril 1939.

(²) A. Portevin et P. Chevenard, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 772; A. Portevin et H. Jolivet, *Ann. Ac. Sc. Techn. Varsov.*, 4, 1937, p. 177.

lequel apparaissent des grains d'un constituant présentant les caractères de la cémentite (coloration par le ferricyanure de potassium alcalin).

La figure 1 représente une telle structure dans un acier, ayant pour composition chimique pour 100, C $0{,}6_5$; Ni $2{,}7_5$; Cr $0{,}7_5$; Mo 0,6, après chauffage à 900° et séjour de 135 minutes à 600° C. (attaque colorante au ferricyanure alcalin; grossissement 2200).

Lorsque la température décroît, le fond devient de plus en plus nette-

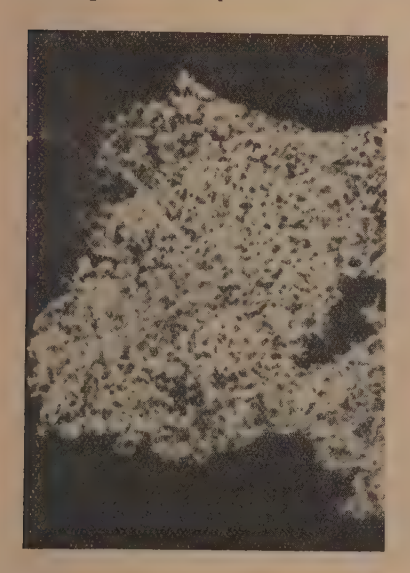



Fig. 1.



Fig. 2.

ment colorable et les plages prennent une allure arborescente rappelant celle des dendrites de solidification : au lieu d'intéresser toute la masse de l'austénite, le développement s'effectue avec une plus grande vitesse suivant certaines directions privilégiées qui semblent en relation avec les directions cristallographiques de l'austénite. La figure 2 représente une telle structure dans le même acier, après chauffage à 900° et séjour de 240 minutes à 550° C. (attaque Benedicks; grossissement 1650).

Aux températures les plus basses, on observe, suivant ces directions, des prolongements aciculaires en cours de transformation, les régions apparaissant sous l'aspect d'aiguilles enchevêtrées, disposées en structure du type Widmanstätten, puis finalement arrivent à se réduire à des squelettes de cémentite aciculaire.

Par réchauffage au-dessous de la température de début de transformation au chauffage Ac_1, ces structures coalescent très rapidement : le fond perd sa coloration [3] et les globules de cémentite deviennent aisément observables. Dans les mêmes conditions, la coalescence des structures lamellaires est à peine amorcée.

Ces divers aspects ne s'observent d'une façon caractéristique que dans les aciers eutectoïdes pour lesquels les deux domaines Ar' et Ar'' sont nettement séparés, circonstance qui permet de les rattacher sans ambiguïté au domaine Ar'. Les cas où ils semblent avoir été mis en évidence ont souvent prêté à les confondre avec les produits de décomposition issus de la transformation dans le domaine Ar''.

Comme il a déjà été indiqué, l'interprétation la plus vraisemblable est qu'ils en diffèrent par le constituant qui prend initialement naissance dans l'austénite. Ce constituant *directeur*, pour employer la terminologie proposée pour les agrégats eutectiques [4], serait ici la cémentite (Ar') et non une ferrite sursaturée (Ar'').

CHIMIE ORGANIQUE. — *L'hydrolyse partielle du dichlorure sulfoacétique.* Note [1] de M. **Roger Vieillefosse**, présentée par M. Marcel Delépine.

Nous avons décrit l'an passé [2] le dichlorure de l'acide sulfoacétique $SO^2Cl—CH^2—COCl$ et nous avons fait connaître par la suite [3] un certain nombre de dérivés du même acide. Dans un Mémoire récemment paru [4], Bodendorf et Senger, qui n'ont pas eu connaissance de nos résultats antérieurs, décrivent, entre autres, le même dichlorure et un corps qui, d'après l'analyse, est un monochlorure résultant d'une demi-hydrolyse du dichlorure, par suite d'une hydrolyse par l'air humide. Cette publication nous incite à présenter quelques nouvelles observations sur des résultats que nous avions déjà.

---

(3) Qui pourrait être due à la cémentite très divisée.
(4) A. Portevin, *J. Inst. Met.*, **29**, 1923, p. 239.

(1) Séance du 24 avril 1939.
(2) *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, **5**, 1938, p. 808.
(3) *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, **6**, 1939, p. 34.
(4) *Ber. d. chem. Ges.*, **72**, 1939, p. 571.

Plus commodément que par cette hydrolyse spontanée à l'air humide, nous avons préparé le monochlorure par la technique suivante :

Dans un ballon muni d'un thermomètre et d'un agitateur, on verse un poids connu de dichlorure en solution dans l'éther anhydre. On refroidit à -10° dans un mélange réfrigérant, puis on ajoute lentement et en agitant dans la liqueur une solution titrée d'eau dans l'éther anhydre correspondant à une molécule d'eau par molécule de dichlorure. La transformation est pratiquement intégrale et le résidu de l'évaporation constitue un produit presque pur, en belles aiguilles fondant à 72°-75°.

Bodendorf et Senger attribuent à ce corps la formule d'un chlorure carboxylique $SO^3H—CH^2—COCl$, en se basant sur une excellente raison, savoir : l'identité entre deux monoanilides obtenus l'un par l'aniline sur ledit monochlorure, et l'autre par sulfonation de la bromacétanilide.

Tout en reconnaissant l'importance de l'argument, nous ne croyons pas devoir accepter la constitution proposée, à laquelle nous préférons celle d'un chlorure sulfonique $SO^2Cl—CH^2—CO^2H$.

Tout d'abord, comme l'ont signalé les auteurs, tout donne à penser que le chlorure de la fonction carboxylique est beaucoup plus sensible à l'humidité que le chlorure de la fonction sulfonique : c'est donc celui-ci qui doit rester indemne dans l'hydrolyse partielle.

Mais nous sommes en mesure de présenter une preuve plus directe ; nous avons constaté que ce monochlorure, traité par l'hydrogène naissant, dégageait de l'hydrogène sulfuré. Cette réaction démontre que le groupement sulfonique a été réduit ; il a dû se faire intermédiairement de l'acide thioglycolique $SO^2Cl — CH^2 — CO^2H + H^2 \rightarrow HS — CH^2 — CO^2H$, corps très sensible à l'hydrogène naissant, lequel l'attaque avec dégagement d'hydrogène sulfuré, comme nous nous en sommes assuré sur un échantillon de cet acide.

D'après tout ce que l'on sait sur le comportement de la fonction acide sulfonique, vis-à-vis des réducteurs, cette réaction serait incompréhensible si la fonction acide sulfonique était libre ; seul le chlorure sulfonique est hydrogénable et, en particulier, nous avons vérifié que la fonction SO^3H de l'acide sulfoacétique n'était pas attaquée par l'hydrogène naissant.

Les mêmes raisons valent pour les chlorures esters sulfoacétiques que nous avons précédemment décrits. Un chlorure ester éthylique, par exemple, peut être obtenu par chloruration du monoester carboxylique [3] ou par l'action de l'alcool éthylique sur le dichlorure. Le composé unique obtenu par l'une ou l'autre méthode est attaqué par l'hydrogène naissant

avec formation d'hydrogène sulfuré. Or, la fonction ester sulfonique n'est pas attaquable, comme on peut le constater avec le diester éthylique sulfoacétique par exemple : il ne peut donc s'agir que d'un monochlorure sulfonique.

Pour le monochlorure monoacide en particulier, cet argument nous paraît avoir un poids tel que nous n'hésitons pas à lui donner le pas sur celui de la formation de l'amide; l'une des deux réactions étant irrégulière, nous ne croyons pas que ce puisse être la réaction de réduction.

Il reste à expliquer comment, la fonction chlorure d'acide étant sur le groupement sulfonique, ce pourrait être le groupement carboxylique qui donnerait l'amide par réaction de l'aniline.

Sans prétendre nous prononcer définitivement sur ce mécanisme singulier, nous proposons l'explication suivante, qui est basée justement sur la faible réactivité bien connue de la fonction chlorure sulfonique.

Le premier temps de l'action de la base consisterait dans la formation du sel carboxylique de l'anilide (I) sans réaction sur le chlorure sulfonique, dont le rôle se bornerait, dans un deuxième temps, à celui d'un agent de déshydratation sur le sel d'aniline, soit à l'intérieur de la molécule même (II), soit d'une molécule à l'autre :

(I) $ClSO^2.CH^2.CO^2H + C^6H^5.NH^2 \rightarrow ClSO^2.CH^2.CO^2H, NH^2.C^6H^5$

(II) $Cl.SO^2.CH^2.CO^2H, NH^2.C^6H^5 \rightarrow SO^3H.CH^2.CO.NH.C^6H^5 + ClH.$

La faible réactivité du groupement chlorure sulfonique est encore illustrée par la difficulté rencontrée dans la préparation des amides. Il a presque toujours été nécessaire d'opérer à chaud et nous avons dû, parfois, faire agir une base auxiliaire (carbonate de lithium) pour favoriser le déplacement de l'acide chlorhydrique.

Nous en profitons pour signaler quelques amides obtenues dans ces conditions : ββ-dinaphtylamide sulfonique ester carboxy-méthylique $(C^{10}H^7)^2.N.SO^2.CH^2.CO^2.CH^3$.(F. 112°-113°); ββ-dinaphtylamide sulfonique ester carboxy-éthylique $(C^{10}H^7)^2.N.SO^2.CH^2.CO^2.C^2H^5$ (F. 109°-110°); ββ-dinaphtylamide sulfonique ester carboxy-propylique $(C^{10}H^7)^2.N.SO^2.CH^2.CO^2.C^3H^7$ (F. 86°-87°); bis (ββ-dinaphtylamide) sulfoacétique $(C^{10}H^7)^2.N.SO^2.CH^2.CO.N.(C^{10}H^7)^2$ (F. 239°-240°), phényl β-naphtylamide sulfonique ester carboxy-éthylique (C^6H^5), $(C^{10}H^7)N.SO^2.CH^2.CO^2.C^2H^5$ (F. 105°-106°); bis (phényl β-naphtyl amide) sulfoacétique (C^6H^5), $(C^{10}H^7).N.SO^2.CH^2.CO.N.(C^6H^5)$.-$(C^{10}H^7)$ (1re F. 166°-167°, 2e F. 184°-185°).

CHIMIE ORGANIQUE. — *Existence probable de trois α.α′-dibenzylcyclohexanones.* Note (1) de MM. **Raymond Cornubert** et **Guy Morelle**, présentée par M. Marcel Delépine.

L'un de nous, en collaboration avec M. De Demo, a isolé trois substances ayant la composition d'une α.α′-dibenzylcyclohexanone (I) et de points de fusion respectifs 55°, 103° et 122° (2),

$$\begin{array}{c} CH^2-CH^2-CH^2 \\ | \qquad\qquad | \\ (C^7H^7)CH-CO-CH(C^7H^7) \\ (I). \end{array} \qquad \begin{array}{c} CH^2-CH^2-CH^2 \\ | \qquad\qquad | \\ (C^7H^7)^2C-CO-C(C^7H^7)^2 \\ (II). \end{array}$$

Depuis cette époque, de nouvelles recherches ont établi que les corps F 55° et F 122° sont des α.α′-dibenzylcyclohexanones stéréoisomères susceptibles de se mettre en équilibre et se comportant de la même façon que les α-décalones stéréoisomères (3). Qu'est le corps F 103°?

Rappelons que cette substance fut obtenue pour la première fois en 1929 dans l'hydrogénation de la dibenzylidènecyclohexanone sous l'influence d'un noir de platine au sein de l'éther (4); elle a été retrouvée dans la benzylation de l'α-benzylcyclohexanone (5) avec un rendement de 1 pour 100, mais dans certains cas ce mode opératoire a conduit à la cétone F 122° et non à la cétone F 103°, ceci avec le même détestable rendement (6).

Nous avons pu retrouver le corps F 103° en benzylant la cyclohexanone et l'amener à fondre à 105°, mais le rendement n'a pu être porté qu'à 2 pour 100; nous avons seulement pu écourter considérablement la durée de l'opération. Malheureusement il nous a été impossible, comme dans maints essais effectués depuis dix ans, de reproduire le corps F 105° à partir de la dibenzylidènecyclohexanone.

Les résultats suivants ont été acquis :

1° Le corps F 105° est une cétone distincte des cétones F 55° et F 122°;

---

(1) Séance du 17 avril 1939.

(2) R. Cornubert et M. De Demo, *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1656.

(3) R. Cornubert, M. André et M. De Demo, *Bull. Soc. Chim.*, 6, 1939, p. 103 et 113.

(4) R. Cornubert et Chr. Borrel, *Bull. Soc. Chim.*, 45, 1929, p. 1160.

(5) R. Cornubert et A. Maurel, *Bull. Soc. Chim.*, 49, 1931, p. 1514; R. Cornubert et G. Sarkis, *Bull. Soc. Chim.*, 2, 1935, p. 195.

(6) R. Cornubert et M. André, *Bull. Soc. Chim.*, 4, 1937, p. 217.

alors que ces dernières en effet donnent soit une oxime F183° soit une oxime F91-92° (ou la forme cristalline F113-114° de cette dernière), une semi-carbazone F190-191°, une combinaison tétrahydropyronique F177-178° et un alcool F123° par réduction en milieu alcalin, la cétone F105° engendre une oxime F123° (²) que nous avons represparée, ainsi qu'une semi-carbazone F164-165°, ne fournit pas de combinaison tétrahydropyronique et conduit à un alcool très visqueux après réduction par le sodium et l'alcool éthylique ou surtout l'alcool amylique.

2° Le corps F105° n'est pas un mélange à point de fusion fixe des cétones F55° et F122° ainsi qu'il ressort du diagramme de fusion; de plus le mélange F105° de 73 pour 100 de cétone F122° et de 27 pour 100 de cétone F55° a fondu à 83° après mélange avec la cétone F105°; enfin l'oximation de ce mélange contenant 73 pour 100 de cétone F122° et 27 pour 100 de cétone F55° a conduit sensiblement à 73 pour 100 d'oxime F114° et à 27 pour 100 d'oxime F183°; pour cette proportion le mélange des oximes fond à 105° et non à 123°.

3° Le corps F105° n'a pu être converti de nouveau en le corps F122°, contrairement à ce qui avait été observé initialement (⁴), pas plus d'ailleurs qu'en le corps F55°.

4° Le corps F105°, par benzylation, conduit à l'α.α'-tétrabenzylcyclohexanone (II) F174°, tout comme les cétones F55° et F122°.

5° Le corps F105°, par hydrogénation catalytique au platine sous pression, au sein de l'éther, engendre un liquide extrêmement visqueux qui présente la composition d'un α.α'-dihexahydrobenzylcyclohexanol conduisant à un phényluréthane F132-134° dont le mélange avec le phényluréthane F137° de l'α.α'-dihexahydrobenzylcyclohexanol F92° (issu de la dihexahydrobenzylcyclohexanone F78° provenant de l'α.α'-dibenzylcyclohexanone F122°), fond à 115-116°. Il s'agit donc d'alcools différents.

En résumé, ce corps F105° paraît être une troisième α.α'-dibenzylcyclohexanone :

a. à cause de ses modes de préparation, en particulier par son obtention initiale lors d'une hydrogénation de dibenzylidènecyclohexanone (malheureusement, l'épreuve de mélange n'a pu être réalisée entre la cétone F105° d'hydrogénation et la cétone F105° d'alcoylation, toute la cétone F105° d'hydrogénation ayant été consommée en 1929 dans une expérience et retrouvée transformée en cétone F122°);

b. à cause de sa dibenzylation en α.α'-tétrabenzylcyclohexanone;

c. par le fait qu'on peut fixer 7^{mol} d'hydrogène et qu'on obtient des

dérivés différents de ceux isolés précédemment avec les cétones F 55 et F 122°;

d. parce que, par benzylation de l'α-benzylcyclohexanone, on obtient soit l'α.α'-dibenzylcyclohexanone F 122°, soit la cétone F 105°, et ceci avec le même rendement.

Néanmoins, avant de déclarer définitivement que le corps F 105° est sûrement une troisième α.α'-dibenzylcyclohexanone, et que, par conséquent, les prévisions d'isomérie basées sur la conception plane des corps monocyclaniques sont dépassées, nous voudrions étudier comparativement la dégradation oxydante des cétones F 55, 105 et 122°; à ce point de vue, les expériences actuellement réalisées avec la cétone F 122° ont simplement révélé la grande résistance de cette cétone à la dégradation oxydante. Ni l'oxydation permanganique, ni l'oxydation chromique, ni l'oxydation nitrique n'ont permis d'attaquer ce corps; seule l'oxydation nitrique, en présence de nitrate d'argent, l'a modifié, mais les corps formés n'ont pu être identifiés à l'exception de l'acide benzoïque.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la constitution de l'essence et de l'huile pyrogénée de* Juniperus Oxycedrus *L.* Note de MM. **Max Mousseron**, **Robert Granger** et **Max Ronayroux**, présentée par M. Marcel Delépine.

L'essence de bois et l'huile pyrogénée de *Juniperus Oxycedrus* L. ont été l'objet de recherches nombreuses aboutissant à la mise en évidence de cadinène.

La distillation fractionnée, avec une forte colonne de Podbielniak, de quantités extrêmement importantes d'essence et d'huile pyrogénée a établi une grande similitude de composition entre l'essence et la partie neutre du goudron de Cade. De l'une et de l'autre, trois substances ont été isolées à l'état parfaitement pur : le cadinène, le cadinol et un carbure sesquiterpénique $C^{15}H^{24}$ non identifié.

Le cadinène $C^{15}H^{24}$ avait été décelé dans l'essence par Huerre [1] et dans l'huile par Wallach [2], grâce à la propriété qu'il possède de fixer deux molécules d'acide chlorhydrique pour donner un dichlorhydrate solide; le carbure, régénéré de cette combinaison, était décrit comme une

(1) *Journ. Pharm. Chim.*, 7e série, **21**, 1920, p. 347.
(2) *Ann. d. Chem.*, **238**, 1887, p. 82.

substance *lévogyre* dont le pouvoir rotatoire dépendait du procédé d'élimination de l'acide [Lepeschkin : $[\alpha]_D -111°,28$ (3)].

Séparé exclusivement par distillation sous pression réduite, le cadinène existant réellement dans la plante est un liquide fortement *dextrogyre*, $Éb_{20}$ 144°; d_{25} 0,9186; n_D^{25} 1,5136; $[\alpha]_{546} +80°,39$; $[\alpha]_{579} +68°,65$.

La déshydrogénation par le soufre à 250° pendant 2 heures fournit le 1.6-diméthyl-4-isopropylnaphtalène ou cadalène, $Éb_{20}$ 165°; d_{25} 0,9716; n_D^{25} 1,58491, identique au composé synthétisé par Ruzicka et Seidel (4), dont le picrate fond à 114°. Par hydrogénation au platine, il donne le tétrahydrocadinène, $Éb_{20}$ 142°; d_{25} 0,8883; n_D^{25} 1,48406; $[\alpha]_{546} -2°,65$; $[\alpha]_{579} -2°,41$. L'action de l'acide chlorhydrique conduit à un seul chlorhydrate, malgré la multiplicité des isomères que laisse prévoir la théorie, la cristallisation fractionnée dans l'acétate d'éthyle donnant des dépôts identiques, F. 116°; $[\alpha]_{546} -46°,0$; $[\alpha]_{579} -41°,0$ (solution chloroformique à 2,5 %).

Le cadinol $C^{15}H^{25}.OH$, très abondant dans l'essence (40 %), n'existe qu'en assez faible proportion dans l'huile (10 %), ayant été partiellement détruit au cours de la pyrolyse du bois. C'est un liquide incolore peu odorant, $Éb_{20}$ 166°; d_{25} 0,9700; n_D^{25} 1,50741; $[\alpha]_{546} -64°,93$; $[\alpha]_{579} -56°,88$. Déshydrogéné, il conduit au cadalène (picrate F. 114°); il fixe une molécule d'hydrogène et donne le dihydrocadinol $Éb_{20}$ 155°; d_{25} 0,9563; n_D^{25} 1,49680; $[\alpha]_{546} -33°,47$; $[\alpha]_{579} -29°,54$. L'acétylation du cadinol ou de son dérivé hydrogéné à 100 ou 150° par l'anhydride acétique est partielle (10 à 25 %), ce qui semble en faveur d'une fonction alcoolique tertiaire.

Le carbure sesquiterpénique, moins abondant que le cadinène, est extrait surtout de l'huile. La distillation fractionnée donne un mélange de ce carbure et de diméthylnaphtalène, de points d'ébullition très voisins, que l'on dédouble par traitement à l'acide picrique.

Le sesquiterpène $C^{15}H^{24}$ est un liquide lévogyre, $Éb_{20}$ 132°; d_{25} 0,9112; n_D^{25} 1,50167; $[\alpha]_{546} -27°,00$; $[\alpha]_{579} -23°,61$, fixant deux molécules d'hydrogène pour donner un carbure saturé $C^{15}H^{28}$, $Éb_{20}$ 130°; d_{25} 0,8969; n_D^{25} 1,48830; $[\alpha]_{546} -2°,09$; $[\alpha]_{579} -1°,64$; déshydrogéné, il ne fournit ni cadalène, ni carbure susceptible de se combiner à l'acide picrique.

Le diméthylnaphtalène ne paraît exister que dans l'huile. Régénéré de

(3) *Journ. Soc. Phys.-Chim. R.*, 40, 1908, p. 698.
(4) *Helv. Chim. Acta.*, 5, 1922, p. 369.

son picrate F. 105°, il constitue un liquide, $Éb_{20}$ 133°; d_{25} 0,9993; n_D^{25} 1,60004.

Enfin, de l'essence de bois de *Juniperus Oxycedrus* L., on isole 5 pour 100 environ d'un autre alcool sesquiterpénique $C^{15}H^{25}.OH$, isomère du cadinol, cristallisé en fines aiguilles F. 118°-119°, dont l'activité optique est très élevée, $[\alpha]_{546}$ — 103°,5; $[\alpha]_{579}$ — 89°,2 (solution benzénique à 2,85 pour 100).

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur un nouvel exemple de passage du cycle en C^5 au cycle en C^6 par déshydratation pinacolique.* Note de M. **Raymond Calas**, présentée par M. Marcel Delépine.

Par action de l'iodure de méthylmagnésium sur le 3-méthylcyclopentanol-1-carbonate de méthyle-1 *trans*, on obtient la 3-méthylcyclopentylisopropylpinacone (I), Éb. 119°, qui se présente, après cristallisation dans la ligroïne, sous la forme de petits cristaux blancs F. 57°.

La déshydratation de ce diol peut donner naissance à divers produits correspondant à l'élimination soit d'une, soit de deux molécules d'eau :

1° *Élimination d'une molécule d'eau.* — Il peut se former ainsi quatre cétones isomères, deux cétones en C^5 : les 1.3-diméthyl-1-acétylcyclopentanes *cis* (II) et *trans* (III), deux cétones en C^6 : la 2.2.4-triméthylcyclohexanone (IV) et la 2.2.5-triméthylcyclohexanone (V).

(I). CH^3 — CH — H^2C — CH^2 — H^2C — C — C (CH^3)(CH^3) ; OH OH

Élimination de l'OH nucléaire → (II). CH^3 — CH — H^2C — CH^2 — H^2C — $H^3C—OC$ — $C—CH^3$ et (III). CH^3 — CH — H^2C — CH^2 — H^2C — H^3C — $C—CO—CH^3$

Élimination de l'OH extranucléaire → (IV). CH^3 — CH — H^2C — CH^2 — H^2C — C (CH^3)(CH^3) — CO ; (V). CH^3 — CH — H^2C — CH^2 — H^2C — CO — C — H^3C CH^3

2° *Élimination de deux molécules d'eau.* — Deux carbures diéniques : le 1-méthyl-3-isopropényl-Δ_2-cyclopentène (II) et le 1-méthyl-3-isopro-

pényl-Δ_3-cyclopentène (III) peuvent se former dans ces conditions.

(I). CH^3 — CH ; H^2C — CH^2 ; H^2C — C(OH) — C(OH)(CH^3)(CH^3)
→
(II). CH^3 — CH ; H^2C — CH ; H^2C — C — C(=CH^2)(CH^3)
et
(III). CH^3 — CH ; H^2C — CH^2 ; H^2C = C — C(=CH^2)(CH^3)

Cette déshydratation, réalisée à 110° par l'acide oxalique en solution aqueuse, nous a donné un produit que nous avons traité par le chlorhydrate d'hydroxylamine. Nous avons ainsi séparé un mélange d'oximes et une faible quantité de carbure.

Le mélange d'oximes n'ayant pu être fractionné, nous avons régénéré les cétones que nous avons ensuite combinées à la semicarbazide. Par cristallisation fractionnée dans l'alcool absolu, dans l'acétone, et dans le mélange éther de pétrole et acétone, nous avons pu séparer :

1° Une semicarbazone peu soluble dans les divers solvants, F : 212°, constituant 65 pour 100 de la masse cétonique. Elle correspond à la 2.2.4-triméthylcyclohexanone : nous avons en effet réalisé la synthèse de ce composé par méthylation de la 2.4-diméthylcyclohexanone et constaté qu'il y a identité absolue entre les produits obtenus par les deux voies. Les propriétés de cette cétone sont les suivantes : Éb_{23} 80°; D_4^{21} 0,8895; n_{5893}^{24} 1,44264; R. M. trouvée 41,57; calculée 41,69; η_{20} 1,78 centipoise; γ_{20} 31,6 dynes/cm. Parachor trouvé 373; calculé 369.

2° Une semicarbazone F. 154°, 35 pour 100 environ, plus soluble, correspondant à une cétone qui réduit l'hypobromite de sodium à 0° et possède la structure du 1.3-diméthyl-1-acétylcyclopentane vraisemblablement *cis* (II).

3° Une très petite quantité de semicarbazone F. 110°, extrêmement soluble dans tous les solvants organiques; c'est la semicarbazone du 1.3-diméthyl-1-acétylcyclopentane *trans* (III).

Le carbure diénique, obtenu en quantité trop faible pour qu'il soit possible de l'identifier, présente les propriétés suivantes, Éb_{760} 151-152°; Éb_{17} 53°; D_{25}^{25} 0,8374; D_4^{25} 0,8361; n_{5893}^{25} 1,47435; R. M. trouvée 40,97; calculée 40,62. Il se polymérise avec une très grande facilité.

Dans cette déshydratation, la transposition moléculaire est donc favorisée. M. Godchot et M[lle] Cauquil [1] avaient remarqué que la même

---

[1] *Comptes rendus*, **206**, 1938, p. 297.

opération, effectuée sur le diol homologue en C^6, conduisait principalement à un mélange de carbure diénique et de cétones non transposées.

GÉOLOGIE. — *Sur les Bryozoaires siluriens de la Montagne Noire.* Note de M. **Ferdinand Prantl**, transmise par M. Charles Jacob.

Le matériel étudié provient de différentes localités du versant méridional de la Montagne Noire : Est de la Grange du Pin (Nord-Ouest de Gabian) et Mont-Glauzy (3^{km} au Nord-Est de Gabian) dans l'Hérault, Villeneuve-Minervois et point coté 523 (2^{km} au Nord-Est de Limouzis) dans l'Aude. Les échantillons ont été recueillis par M. Thoral qui me les a communiqués, en même temps qu'il m'a fourni toutes les indications utiles concernant les gisements et leur position stratigraphique.

A l'Est de la Grange du Pin, dans les grès à Bryozoaires qui terminent les quartzites caradociens à *Calymmenella Boisseli* Berg., et dans les calcaires ashgilliens à *Nicolella Actoniæ* Sow., on trouve des représentants des genres *Batostoma*, *Chasmatoporella*, *Dekayia*, *Graptodictya*, *Hallopora*, *Homotrypella*, *Prasopora* et *Ptylodictya*. Dans l'Ordovicien supérieur du Mont Glauzy il y a des *Batostoma*, *Prasopora* et *Hallopora*, identiques à ceux du gisement de la Grange du Pin. L'étude des Bryozoaires de ces deux localités ne permet pas de constater une différence stratigraphique importante entre les grès attribués au Caradoc s. str. et les calcaires en plaquettes rapportés à l'Ashgillien. Les Bryozoaires des environs de Villeneuve-Minervois appartiennent, semble-t-il, aux mêmes formes et sont d'un même âge.

Le gisement situé au Nord des grottes de Limouzis et qui est caractérisé par la découverte isolée de représentants des genres *Semicoscinium* et *Fistulipora* doit être placé à part : il pourrait être plus récent que les autres gisements ainsi que sa position sur le terrain le laissait prévoir. En effet, le genre *Semicoscinium* Prout est encore inconnu dans l'Ordovicien, mais ses représentants sont communs dans le Gothlandien et dans le Dévonien; il en est de même pour le genre *Fistulipora* M' Coy dont une seule espèce a été signalée dans l'Ordovicien de la Baltique. Quoi qu'il en soit, l'examen de la faune de Bryozoaires de Limouzis ne laisse apparaître encore aucune relation avec l'association à Bryozoaires des autres gisements languedociens.

En général, la faune des Bryozoaires ordoviciens de la Montagne Noire est caractérisée par la nette prédominance des Trépostomes. Elle est bien semblable à la faune du Caradoc des Alpes carniques et spécialement à celle de la région du Pallon di Pizull, Ugwa, Capolalgo, et à celle de la série des Hochwipfelschichten de la région du Hohe Trieb décrites récemment par Nekhoroshew. Dans les Alpes carniques comme dans la Montagne Noire, le trait caractéristique consiste dans l'abondance des représentants de la famille des *Halloporidæ* Bassler et de celle des *Prasoporidæ* Ulrich. Les *Hallopora* et les *Prasopora* de la Montagne Noire se rapprochent particulièrement

de *H. Taramelli* V. de R. et de *P. fistuliporoides* V. de R. décrites par Vinassa de Regny de la région du Pallon di Pizull. *Chasmatoporella metzi* Nekh., espèce typique des Hochwipfelschichten du Hohe Trieb est présente dans le Caradoc de Gabian où l'on trouve aussi un *Graptodictya* voisin de la forme décrite par Nekhotoshew du Hohe Trieb et un *Ptilodictya* voisin de *Pt.* ex-gruppe *lanceolata* Goldf. de la même région.

Les Bryozoaires de l'Espagne, de l'Afrique du Nord et du Nord de la France sont encore si peu connus qu'on ne peut les comparer avec ceux de la Montagne Noire.

Je n'ai pas trouvé de relation certaine entre les riches faunes de Bryozoaires de l'Ordovicien anglais et bohémien et celle du Caradoc languedocien. Les genres *Fistulipora* et *Graptodictya* sont communs à la Montagne Noire et aux régions baltiques.

Au point de vue stratigraphique et paléontologique un fait intéressant à retenir est la présence, au Nord de Gabian, du genre *Dekayia* M. E. et H. ; jusqu'à ce jour, ce genre n'était connu que dans le Cincinnatien de l'Amérique du Nord.

En résumé, l'étude paléontologique entreprise prouve l'existence d'une association à Bryozoaires de composition homogène dans tout l'Ordovicien supérieur languedocien. Cette association est analogue à celle connue dans le Caradoc des Alpes carniques; elle est nettement différente de celles décrites en Angleterre, en Bohême et dans les régions baltiques. Dans le Gothlandien-Dévonien du Nord de Limouzis existe une autre association à Bryozoaires, moins bien connue que celle du Caradoc; les relations entre ces deux faunes sont encore obscures.

HYDROLOGIE. — *Propagation des composantes hydrométriques dans le bassin de l'Oronte.* Note [1] de M. **Soubhi Mazloum**, présentée par M. Georges Perrier.

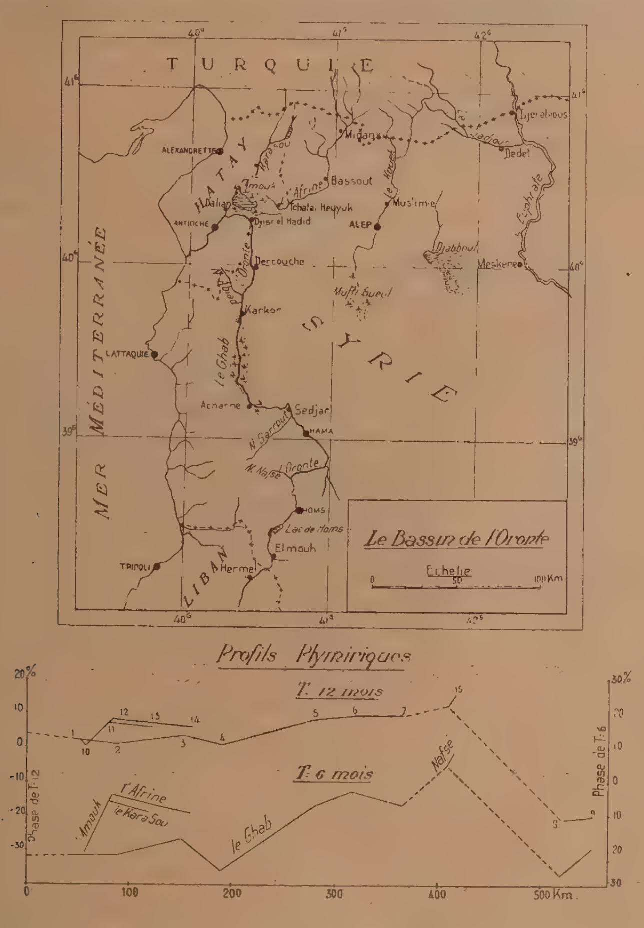
Les débits observés à 15 stations hydrométriques installées depuis 1931, dans le bassin de l'Oronte, ont été analysés suivant la méthode de H. Labrouste. Cette Note a pour objet de résumer les caractères présentés par les composantes annuelle et semi-annuelle, dégagées pour les années 1932 à 1936.

La phase moyenne réalisée aux différentes stations a été mesurée au 1er janvier, pour la composante annuelle, et au 1er janvier et au 1er juillet, pour la semi-annuelle; les valeurs obtenues, exprimées en centièmes de la

(1) Séance du 3 avril 1939.

période, ont servi au tracé des profils plymiriques ([2]). Leur examen conduit aux conclusions suivantes :

Les deux composantes étudiées admettent le même sens de propagation



dans les différents secteurs; ce sens va d'aval en amont pour l'Afrine et le Kara Sou (régime anaplymirique); et, sur l'Oronte, elles évoluent tantôt d'amont en aval (régime katoplymirique) et tantôt en sens inverse : la distribution des pluies, plus précoces en aval qu'en amont ([3]), produit une

([2]) Mlle A. Péreau, *Comptes rendus*, 207, 1938, p. 932.

([3]) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 458.

croissance de la phase entre Djisr-el-Hadid et Antioche; les retenues du Ghab et de l'Amouk ralentissent la transmission des débits et exposent le régime de l'Oronte, à l'aval, à l'influence des pluies locales (pics de Karkor et de Dercouche); enfin le retard observé au voisinage des sources (Hermel) peut être attribué à la lenteur du cheminement des eaux souterraines.

Tableau des stations observées.

Stations.	Composantes			
	Annuelle.		Semi-annuelle.	
	Phase.	Importance.	Phase.	Importance.
Sur l'Oronte.				
		%₀		%₀
1. Antioche	+ 2,5	66,0	−21,7	34,0
2. Djisr-el-Hadid	+ 0,8	50,0	−21,7	30,3
3. Dercouche	+ 3,3	68,0	−16,6	18,2
4. Karkor	+ 0,7	71,0	−25,7	35,5
5. Acharné	+ 8,8	52,3	− 7,0	24,0
6. Sedjar	+ 9,7	35,7	− 2,7	43,0
7. Hama	+ 9,6	32,3	− 6,7	23,2
8. Elmouh	−21,0	–	−27,0	–
9. Hermel	−20,0	–	−18,3	–
Sur le Kutchuk Assi.				
10. Dalian	0,0	80,0	−21,7	36,6
11. Pont d'Alexandrette	+ 7,8	65,1	− 6,0	28,0
Sur l'Afrine.				
12. Tchatal Heuyuk	+ 8,0	63,7	− 4,6	20,4
13. Bassout	+ 7,1	57,8	− 6,8	20,0
14. Midanki	+ 6,0	51,9	− 9,0	17,7
Sur le Nafsé.				
15. Harb Nafsé	+16,6	49,4	+ 9,0	28,2
Sur le Kouek.				
16. Muslimié	+ 8,3	65,1	− 6,6	31,6
Sur le Sadjour.				
17. Dédet	+ 7,1	78,5	+ 4,3	15,7

Les écarts de phase observés entre les différentes stations permettent de définir la vitesse de propagation des composantes : l'annuelle est la plus rapide et sa vitesse entre Karkor et Dercouche (4^{km},2 par jour) correspond au triple de celle de la composante semi-annuelle; mais lorsque l'eau doit

remplir de vastes réservoirs de lacs ou de marais, la progression des composantes se ralentit (1^{km} par jour dans l'Amouk).

Il apparaît, en définitive, que les diverses particularités des composantes dégagées peuvent être expliquées par la physiographie du bassin de l'Oronte et le régime de son alimentation.

MÉTÉOROLOGIE. — *Radiosondages dans les mers australes.* Note de MM. **R. Bureau**, **M. Douguet** et **Ph. Wehrlé**, présentée par M. Georges Durand-Viel.

Au cours d'une croisière de quelques semaines accomplie par l'aviso *Bougainville*, commandé par le Capitaine de Frégate Fabre de la Ripelle, aux Archipels austraux de l'Océan Indien, quelques radiosondages ont été exécutés en février et mars 1939 à l'aide d'un matériel identique à celui utilisé couramment soit en France, soit à bord du navire stationnaire *Carimaré*. Cette expérience, même réduite à un nombre relativement restreint de radiosondages, était particulièrement intéressante en l'absence de toute donnée sur la stratosphère dans les mers australes.

Le matériel expédié de France a été installé à bord au départ de Madagascar. Une première série de sondages (14) a été effectuée aux îles Kerguélen (latitudes comprises entre 48° et 50°S), les autres au cours du reste de la croisière : 4 aux îles Saint-Paul et Amsterdam (latitude 39°S), 4 en mer entre Saint-Paul et l'île Maurice et un à l'île Maurice (latitude 20°S).

Ces sondages ont permis en particulier de recueillir quelques données sur les altitudes et les températures de la stratosphère dans l'hémisphère Sud, pendant l'été austral. On constate, comme dans l'hémisphère Nord, que, dans l'ensemble, l'altitude de la base de la stratosphère augmente et que sa température diminue quand la latitude diminue (voir le tableau). De plus, la série de sondages de Kerguélen révèle une grande variabilité d'un jour à l'autre. Cependant tous ces sondages donnent, pour la base de la stratosphère, à la fois des altitudes beaucoup plus basses et des températures plus chaudes que celles que l'on constate couramment à Paris (sensiblement de même latitude). Y a-t-il eu simplement coïncidence des sondages avec des situations météorologiques caractérisées par des stratosphères exceptionnellement basses et chaudes? On sait, et les radiosondages accomplis quotidiennement à Paris depuis le 1er janvier 1938 le confirment,

que ces situations se présentent toujours avec des invasions d'air polaire direct (air arctique). Mais il est très rare que des hauteurs de moins de 8^{km} se maintiennent plus de 48 heures. Par contre, chaque fois que la France est balayée par des masses d'air tropical ou simplement par des masses d'air maritime venant d'un secteur méridional, la base de la stratosphère, même en plein hiver, peut s'élever à plus de 14^{km} et se refroidir à des températures inférieures à — 65°.

Date du radiosondage.	Altitude de la base de la stratosphère.	Température de la base de la stratosphère		
		latitude 20° S (Maurice).	latitude 39° S (Saint-Paul).	latitude 49° S (Kerguélen).
6 mars........	16500 m	—62	—	—
24 février......	11000	—	—50	—
11 »	9800	—	—	—45
8 »	9600	—	—	—55
17 »	9100	—	—	—47
7 »	7900	—	—	—48
18 »	7600	—	—	—47
16 »	7300	—	—	—43
6 »	6300	—	—	—36
12 »	5800	—	—	—37

Or, sauf un, aucun sondage de Kerguélen n'indique de stratosphère plus haute que 10^{km}. De plus, les lancers ont été effectués par des situations météorologiques diverses et certains d'entre eux au début de baisses barométriques; aucun dans une invasion polaire caractérisée. Pour ces raisons on peut admettre que les résultats sont assez représentatifs de l'allure générale de la haute atmosphère dans les mers australes. Les faibles altitudes trouvées à Kerguélen pour la base de la stratosphère sont peut-être à rapprocher de la latitude du front polaire austral en moyenne nettement plus basse que celle du front polaire boréal.

PALÉOBOTANIQUE. — *Caractères micropaléobotaniques d'une tourbe du Togo.* Note [1] de M. **Georges Dubois** et Mme **Camille Dubois**, présentée par M. Auguste Chevalier.

Nous apportons une contribution nouvelle à la connaissance micropaléontologique des tourbes des régions tropicales et équatoriales [2].

Il s'agit d'une tourbe recueillie en 1928, en Bas-Togo, vallée du Mono, par notre regretté ami R. Dehée, et qu'il nous avait communiquée. Elle provient d'Adabion, en aval de Tokpli, en face d'Athiémé en Dahomey, à environ 50^{km} de l'embouchure du Mono; latitude N. 6°30′ environ; altitude voisine de 20^{m} [3].

Deux sondages ont été faits par R. Dehée, à environ 1^{km} au sud-est du village. Dans l'un, à 200^{m} du fleuve, un calcaire attribué à l'Éocène fut touché sous $4^{m},50$ d'alluvions argilo-sableuses. Dans l'autre, à 400^{m} du fleuve, on traversa $8^{m},45$ d'alluvions sableuses, argileuses et tourbeuses, sans toucher le fond rocheux. C'est en ce dernier sondage que fut rencontrée, à $4^{m},40$ de profondeur, la tourbe, épaisse de $1^{m},55$, et reposant sur une argile noire sableuse à débris végétaux, elle-même épaisse de $2^{m},50$.

Nous disposons de quatre échantillons, dont trois de tourbe (parties supérieure, moyenne et inférieure de la masse tourbeuse) et un d'argile formant le socle de cette masse.

La tourbe noire, compacte, ne montre que peu de restes végétaux macroscopiques et se laisse attaquer aisément à la cuisson potassique. Le produit de coction, fortement coloré en brun, ne contient que peu de restes microscopiques, vis-à-vis de ce que montrent nos tourbes de climat tempéré.

Tourbe supérieure. — Légèrement sableuse. Vaisseaux scalariformes. Nombreuses spores de Fougères (*Type* A) réniformes, lisses, de $40/20^{\mu}$. Débris de sporanges. (Spores et sporanges de type *Polypodiacée.*)

Tourbe moyenne. — Argileuse. Débris végétaux rares, informes. Rares spores de

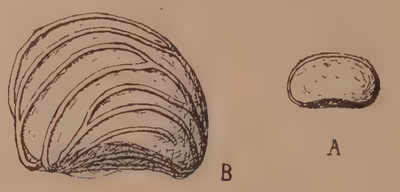
---

(1) Séance du 24 avril 1939.

(2) Connaissance qui a fait quelques progrès surtout grâce à E. Polak (*Verhand. Akad. Wetensch. Amsterdam Natuurk.*, 2e série, 30, III, 1933, p. 1-85, 8 fig., 4 pl.).

(3) Selon A. Aubréville (*Bull. Comité Ét. Hist. et Sc. Afrique Occident. Franç.*, 20, 1937, p. 1-112) le pays est à l'état de brousse avec cultures : anciennement forêt dense détruite par l'homme; saison sèche de 3 mois et demi et petite saison sèche pendant la grande saison des pluies; hauteur des pluies $955^{mm},5$ à Athiémé.

Fougères (*Type* B) peu réniformes, subsphériques ou subtétraédriques, de 90 à 110$^{\mu}$, ornementées de filets saillants, concentriques, ramifiés, anastomosés, et que nous rapportons à *Ceratopteris thalictroides*.



Spores de Fougères de la tourbe d'Adabion (Togo). (Gr. 325 environ) :
A, type Polypodiacée indéterminée; B, *Ceratopteris thalictroides*.

Tourbe inférieure. — Légèrement sableuse. Assez riche en débris figurés. Feutrage de vaisseaux scalariformes. Nombreuses spores de *Type A* et fragments de leurs sporanges. Epidermes. Pollen très rare, indéterminé.

Argile sous la tourbe. — Débris figurés rares et dilacérés. Nombreuses spores de *Type A*. Rares spores de *Type B* (*C. thalictroides*). Très rares pollens indéterminés.

Conclusions. — La tourbe est essentiellement formée de *restes de Fougères*, appartenant à deux espèces au moins, dont l'une *Ceratopteris thalictroides*, Parkériacée aquatique, vit *actuellement encore* dans les régions tropicales et intertropicales [4]. La tourbification fut très intense; elle n'a respecté que quelques tissus ligneux, de rares épidermes, des fragments de sporanges et des spores.

CYTOLOGIE VÉGÉTALE. — *Éléments mitochondriaux actifs et inactifs chez les Diatomées du genre* Fragilaria. Note de M. **Marius Chadefaud**, présentée par M. Alexandre Guilliermond.

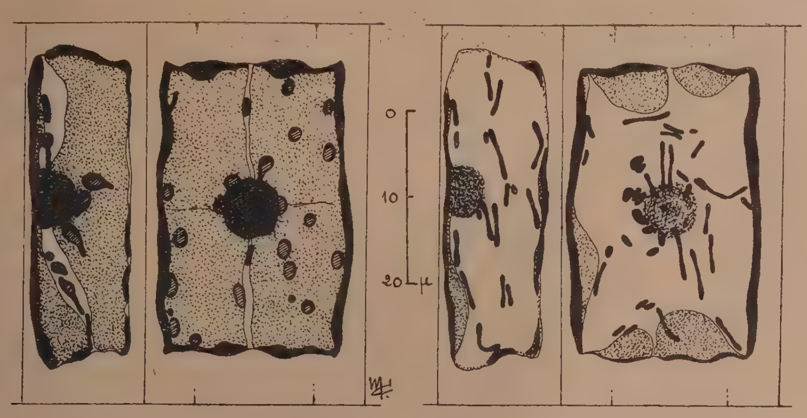
Les observations rapportées dans la présente Note ont été faites sur des *Fragilaria*, fixées au Helly, et colorées à l'hématoxyline ferrique. Bien que le corps cellulaire ait été plasmolysé par le fixateur, le chondriome s'observait, avec la plus grande netteté, dans toutes les cellules convenablement différenciées (voir la figure).

Pour en faire comprendre la disposition, rappelons tout d'abord que le

---

(4) La Fougère *C. thalictroides* Brongn. est connue en Sénégal ainsi qu'en Bas-Dahomey où elle est signalée par A. Chevalier, *Exploration botanique de l'Afrique occidentale française*, 1, 1920, p. 775.

contenu des cellules des Diatomées pennatées est en principe polarisé de l'une à l'autre des deux faces connectives, le centre de l'appareil plastidial, occupé ou non par un pyrénoïde, étant sur le milieu de l'une d'elles. Les *Fragilaria* de la figure ne font pas exception à cette règle; leurs plastes (chromatophores), au nombre de deux ou de quatre, couvrent à peu près totalement l'une des faces connectives, qu'on peut qualifier de *face*



Deux cellules de *Fragilaria* sp. fixées au Helly et colorées à l'hématoxyline ferrique. A gauche, la face plastidiée; à droite, la face opposée.

plastidiée (représentée sur la partie gauche de la figure); ils laissent presque totalement libre la face opposée (représentée à droite). Le noyau est sensiblement plus proche de la face plastidiée que de l'autre. Il n'y a pas de pyrénoïde.

Ceci indiqué, les éléments mitochondriaux reconnaissables dans les préparations étudiées sont de deux sortes. Les uns sont des chondriosomes typiques, en forme de bâtonnets ou de filaments à bouts arrondis, souvent très légèrement renflés en massue à chaque extrémité. Les autres sont des vésicules à cortex mitochondrial et à contenu chromophobe.

Par comparaison avec ce qu'a décrit récemment Geitler (1937) chez les *Pinnularia*, les éléments de la première catégorie sont des chondriocontes légèrement altérés, renflés et raccourcis sous l'action du fixateur. Ils représentent manifestement le *chondriome inactif*, ou chondriome proprement dit, *stricto sensu*. P. Dangeard (1931) a déjà décrit ce chondriome, observé vitalement, chez une Fragilaire.

Les éléments vésiculeux de la seconde catégorie, dont la vésiculation est peut-être en partie l'œuvre des réactifs, ressemblent au contraire beaucoup

à ce que Parat (1928) appelait, dans les cellules animales, le *chondriome actif*. Comme les éléments du chondriome actif, que Parat qualifiait de *lépidosomes*, et qui ne sont rien d'autre que les *dictyosomes* de l'appareil de Golgi, ces éléments peuvent en effet être décrits comme des sortes de chondriosomes ayant subi le phénomène de *pachynèse*, c'est-à-dire renflés et vésiculés de façon à ne plus former que le cortex d'une masse chromophobe. S'ils ont leur équivalent chez les *Pinnularia*, c'est sous la forme des *double-disques* qui s'observent autour du noyau de celles-ci.

Comme il semble y avoir des intermédiaires, dont on peut juger d'après la figure 1, entre les deux catégories d'éléments mitochondriaux, il est possible que le *chondriome actif* ne soit rien d'autre comme l'admettait Parat, qu'une portion différenciée du *chondriome inactif*.

D'autre part, sa localisation dans la cellule est remarquable. Assez souvent, la chose est particulièrement nette dans les cellules représentées sur la figure, c'est autour du noyau, et entre celui-ci et la face plastidiée, que se trouvent les éléments mitochondriaux vésiculeux. Dans cette portion de la cellule, il n'y a guère que de tels éléments, tandis que sur la face opposée ne s'observent d'ordinaire que des chondriocontes inactifs. La zone comprise entre les chromatophores, siège de la photosynthèse, et le noyau, centre physiologique de la cellule, étant certainement une zone de métabolisme particulièrement actif, la signification d'une telle distribution du *chondriome actif* apparaît clairement. Tout semble se passer, selon les vues de Parat, comme si la portion du chondriome située dans la région la plus active du corps cellulaire subissait le phénomène de pachynèse pour constituer le *chondriome actif*. Ajoutons que le *chondriome actif* ainsi défini est évidemment tout à fait distinct de l'appareil plastidial, représenté par les chromatophores.

D'autres *Fragilaria* possèdent, non pas seulement deux ou quatre grands chromatophores couvrant la face plastidiée, mais de nombreux petits plastes discoïdes bruns, également répartis sur toutes les faces de la cellule. J'ai étudié l'une de ces espèces, son *chondriome actif* était formé d'éléments localisés strictement auprès du noyau, et plus fortement sidérophiles que les chondriocontes *inactifs* situés entre les plastes. On passe donc chez ces espèces à une disposition comparable à celle qu'ont décrite Hovasse (1936 et 1937) chez certaines Volvocales, et moi-même (1937) chez certains *Ulothrix* et les *Microspora*.

ALGOLOGIE. — *Sur l'alternance de générations chez les Bonnemaisoniacées.* Note de M. et Mme **Jean Feldmann**, présentée par M. Alexandre Guilliermond.

Un type d'alternance de générations, semblable à celui que nous avons fait connaître récemment chez l'*Asparagopsis armata* (1), se retrouve chez le *Bonnemaisonia asparagoides*. Les carpospores de cette espèce donnent naissance à un thalle rampant, filamenteux, que nous avons précédemment identifié (2) à l'*Hymenoclonium serpens*. Nous avions considéré ce thalle rampant comme un protonéma. En réalité il s'agit d'un tétrasporophyte car, depuis, nous avons observé des tétrasporanges sur des individus d'*Hymenoclonium* récoltés fin novembre, à Banyuls-sur-Mer. Ces tétrasporanges, à division tétraédrique, naissent latéralement sur les filaments rampants et sont le plus souvent pédicellés.

Les carpospores des deux Bonnemaisoniacées que nous avons pu étudier donnent donc toutes deux naissance à un tétrasporophyte de morphologie tout à fait différente de celle du gamétophyte. Le tétrasporophyte du *Bonnemaisonia asparagoides* avait été considéré jusqu'ici comme une Céramiacée (*Hymenoclonium*) et celui de l'*Asparagopsis armata* comme une Rhodomélacée (*Falkenbergia*).

Une autre espèce de *Bonnemaisonia*, *B. clavata* (Schousb.) Hamel, se rencontre dans la Méditerranée. Alors que le *B. asparagoides* est monoïque, le *B. clavata* est dioïque et l'on n'en connaissait jusqu'ici que les individus mâles, ce qui avait motivé des doutes sur sa valeur spécifique. Nous avons découvert la plante femelle, en mai dernier, au cours d'un dragage au Banc de Matifou (Algérie) et étudié le développement de ses carpospores. Celles-ci se développent de la même manière que celles du *B. asparagoides*, mais le thalle rampant, pourvu de cellules sécrétrices (ioduques), auquel elles donnent naissance, diffère nettement par sa taille et sa ramification de l'*Hymenoclonium serpens*, ce qui confirme la validité de cette espèce. Bien que nous n'ayons pas obtenu de tétrasporanges et que nous ne l'ayons pas observé dans la nature, il est très vraisemblable qu'il s'agit là aussi d'un tétrasporophyte.

Le type d'alternance de générations que nous avons décrit chez l'*Aspa-*

---

(1) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 1240.
(2) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 1084.

ragopsis armata se retrouve donc chez les autres Bonnemaisoniacées. Ce type, tout à fait nouveau, rapproche les Bonnemaisoniacées des Rhodophycées diplobiontes, puisque les carpospores, au lieu de donner naissance à une plante sexuée, produisent un tétrasporophyte. Les Bonnemaisoniacées diffèrent toutefois des Rhodophycées diplobiontes, par le dimorphisme très prononcé existant entre le tétrasporophyte et le gamétophyte de la même espèce, ceux-ci présentant toujours la même forme et sensiblement la même structure chez les Rhodophycées diplobiontes. De plus, les tétrasporophytes de l'*Asparagopsis armata* et du *Bonnemaisonia asparagoides* sont haploïdes, les recherches de Svedelius ([3]) ayant montré que chez ces espèces la réduction chromatique s'effectue avant la germination de l'œuf. Gamétophyte, carposporophyte et tétrasporophyte étant haploïdes, ces algues sont donc des haplobiontes, et s'il y a alternance de formes il n'y a pas alternance de phases.

Le cas des Bonnemaisoniacées étudiées est à rapprocher de celui des *Lemanea* et des *Batrachospermum* dont les carpospores donnent naissance à un thalle filamenteux (*Chantransia*). Il y a toutefois plusieurs différences entre le *Falkenbergia* et l'*Hymenoclonium* des Bonnemaisoniacées et les *Chantransia* des Batrachospermes. La structure de l'*Hymenoclonium* et surtout du *Falkenbergia* est beaucoup plus complexe que celle des *Chantransia;* de plus, ceux-ci ne produisent que des monospores et non des tétraspores. En outre, la plante sexuée chez les Batrachospermes ne naît pas d'une monospore de *Chantransia*, mais directement à partir d'une cellule végétative de celui-ci, alors que rien ne permet de supposer que les *Asparagopsis* et les *Bonnemaisonia* puissent naître à partir d'une cellule végétative de *Falkenbergia* ou d'*Hymenoclonium*.

La présence, chez le *Falkenbergia* et l'*Hymenoclonium*, de tétraspores se formant vraisemblablement sans réduction chromatique est assez curieuse, mais il est possible que chez d'autres Bonnemaisoniacées la formation des tétraspores s'accompagne d'une réduction chromatique.

Il y a lieu de remarquer, à ce propos, que, chez les Némalionales, la méiose ne s'opère pas toujours au même stade du cycle de développement. Chez le *Liagora tetrasporifera* Boergs., on admet que celle-ci, au lieu de s'opérer à la germination de l'œuf, comme c'est le cas général chez les Rhodophycées haplobiontes, est reportée à la formation des carpospores qui sont divisées en quatre (carpotétraspores). Le gonimoblaste de cette

---

([3]) *Nov. Acta. R. Soc. Sc. Upsaliensis*, 9, 1933, p. 1-60.

espèce serait donc diploïde. Nous avons récemment observé un cycle de développement analogue chez l'*Helminthocladia Hudsoni* J. Ag. du Maroc (4), espèce très voisine de l'*H. calvadosii* (Lamour.) Setchell des côtes de France, mais qui s'en distingue en particulier par la présence de carpotétraspores à division cruciée tout à fait semblable à celle du *L. tetrasporifera*.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Obtention par les α-monochloronaphtalène et α-monobromonaphtalène d'effets comparables à ceux exercés, sur les caryocinèses végétales, par la colchicine.* Note de MM. **Marc Simonet** et **Marcel Guinochet**, présentée par M. Louis Blaringhem.

Nous avons signalé (1) l'action exercée par le paradichlorobenzène sur la caryocinèse et sur la morphologie des jeunes germinations de Lin. Ces observations, primitivement effectuées avec du paradichlorobenzène du commerce, ont pu être répétées avec le produit chimiquement pur.

Devant ces faits, il était naturel de rechercher si cette propriété du paradichlorobenzène lui est propre, ou si, au contraire, d'autres parmi les nombreux dérivés halogénés des carbures cycliques la possèdent. Il nous a, en particulier, paru indiqué d'étudier tout d'abord ceux du naphtalène. Ce corps, en effet, non seulement possède par lui-même une légère action mito-inhibitrice, ainsi que l'ont indiqué Schmuk (2), puis P. et N. Gavaudan et J. F. Durand (3), mais encore constitue le squelette de l'acénaphtène qui, on le sait, possède des propriétés comparables à celles de la colchicine (D. Kostoff, P. Gavaudan).

Or les deux dérivés halogénés du naphtalène qu'il nous a, à ce jour, été permis d'expérimenter, soit l'α-monochloronaphtalène et l'α-monobromonaphtalène, nous ont donné, avec *Triticum vulgare* L. (4), non pas des modifications du type paradichlorobenzénique, mais bien du type colchicinique. Nos essais ont été effectués, comme précédemment, en boîtes de Pétri de 10cm de diamètre, à l'intérieur desquelles était placé un petit verre

(4) J. Feldmann, *Bull. Soc. d'Hist. nat. Afr. du nord*, 30, mars 1939 (sous presse).

(1) *C. R. Soc. Biol.*, 130, 1939, p, 1057.
(2) *C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 19, 1938, p. 189.
(3) *C. R. Soc. Biol.*, 130, 1939, p. 53, et *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 593.
(4) Variété *Gentile Rosso* n° 4 de la Maison Vilmorin.

de montre contenant une, cinq ou dix gouttes normales Pharmacopée et laissées à la température du laboratoire. Dans ces conditions, les jeunes radicules commencent à apparaître dès le troisième jour. Au quatrième jour, elles sont déjà très nettement épaissies, bulbeuses, vers l'extrémité, absolument comme celles que l'on obtient sous l'influence de la colchicine, de l'acénaphtène et du phényluréthane, et dont J. Lefèvre (5) a donné une excellente photographie. Les jours suivants, le phénomène ne fait que s'accentuer, jusqu'au huitième jour environ, moment où les premières radicules commencent à dépérir si le traitement est prolongé. En outre, l'α-monochloronaphtalène provoque un épaississement globuleux du coléoptile identique à celui qui est consécutif à l'action de la colchicine, de l'acénaphtène et du phényluréthane. Ce phénomène, bien qu'encore notable, est cependant un peu moins accusé avec l'α-monobromonaphalène.

Ainsi peut-on, d'ores et déjà, parler d'une morphose colchicinique, type qui est bien spécial; car, précisons qu'avec le paradichlorobenzène, s'il y a également épaississement des radicules, celui-ci ne se présente pas tout à fait de la même façon, ainsi que nous le décrirons ultérieurement.

Au point de vue cytologique, on observe, après fixation au Navaschine, de jeunes racines âgées de 4 à 6 jours et développées en boîtes de Pétri contenant 5 ou 10 gouttes de l'un ou l'autre des deux produits, puis coloration par la réaction nucléale de Feulgen-Rossenbeck, les phénomènes suivants : augmentation considérable du volume des noyaux, qui sont lobés ou échancrés, cérébriformes ; abondance inaccoutumée des figures de caryocinèse, qui sont bloquées en pseudo-métaphases également difformes ; absence totale d'anaphases et dans l'ensemble, un nombre anormalement élevé de chromosomes, certainement en variations multiples, mais difficile à évaluer avec précision. En un mot, on retrouve toutes les figures décrites par les auteurs (P. Gavaudan, G. Mangenot etc.) qui ont étudié l'action de la colchicine sur les cellules végétales.

Ainsi deux nouvelles substances provoquant des anomalies de la caryocinèse du type colchicinique, lesquelles, comme il a déjà été démontré, aboutissent finalement à un accroissement du nombre de chromosomes et donnent des indications sur les processus susceptibles de provoquer la production de plantes polyploïdes.

---

(5) *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 301.

PHYSIOLOGIE GÉNÉRALE. — *Étude sur les possibilités de respiration sous-marine*. Note de M. **Henri Prat**, présentée par M. Louis Blaringhem.

L'observation des échanges gazeux des végétaux submergés m'a conduit à envisager le problème général de la respiration sous-marine et les possibilités d'assurer la respiration humaine, le fonctionnement de moteurs sous-marins etc., en utilisant l'oxygène dissous dans l'eau et en éliminant le gaz carbonique et les autres gaz nuisibles par voie de dissolution.

I. *Bases biologiques de la recherche*. — Les dispositifs respiratoires les plus intéressants au point de vue de cette étude sont ceux qui emploient comme intermédiaire entre l'eau extérieure et les tissus vivants un milieu gazeux, que nous pouvons appeler *atmosphère auxiliaire*. Ils peuvent tous être rattachés au principe des *branchies trachéennes*. Celles-ci sont réalisées intégralement chez beaucoup de larves aquatiques d'Insectes (Agrionides, Libellulides). Or le procédé par lequel s'effectuent les échanges gazeux des végétaux submergés appartient à un type analogue, le contenu gazeux des lacunes représentant l'atmosphère auxiliaire. Cette atmosphère accumulée dans les plantes aquatiques est d'ailleurs utilisée par de nombreux Insectes aquatiques dépourvus de branchies, par exemple les *Donacia*, qui trouvent ainsi dans la plante le prolongement branchial qui leur fait défaut. Mais les animaux les plus intéressants au point de vue de la respiration sous-marine sont ceux chez qui l'atmosphère auxiliaire est externe et placée au contact de l'eau, sans interposition de membrane. Ce cas est réalisé chez les animaux portant une masse d'air retenue par des poils hydrofuges, tels les Hydrophilides et Dytiscides, et chez les animaux construisant avec des fils de soie des réservoirs d'air submergés, des Araignées Argyronètes, et des larves de Coléoptères (*Hydrocampa*). Dans ces divers cas la masse d'air agit non seulement comme une réserve mais aussi comme un milieu d'échange avec les gaz dissous dans l'eau, c'est-à-dire exactement comme l'atmosphère auxiliaire d'une branchie trachéenne.

II. *Dispositifs expérimentaux*. — Partant de ces bases d'observation j'ai réalisé divers dispositifs expérimentaux. Ceux qui comportent une membrane doivent être écartés par suite des difficultés de réalisation. Les seuls pratiques sont ceux qui mettent directement en contact l'eau et l'atmosphère auxiliaire.

Les résultats de leur fonctionnement m'ont montré qu'il faut environ 80^l d'eau pour éliminer 1^l de gaz carbonique ou apporter 1^l d'oxygène,

dans les limites d'utilisation d'un appareil respiratoire, c'est-à-dire pour des teneurs en CO^2 comprises entre 1 et 2 pour 100 et des teneurs en oxygène supérieures à 16 pour 100.

Pour assurer la respiration d'un homme il faudrait donc un débit d'eau de l'ordre de 100 à 200^l à la minute, la consommation d'oxygène en plongée variant de 1 à 4^l à la minute. Un tel débit n'est pas actuellement réalisable par la force musculaire humaine. Le procédé ne pourrait donc être intéressant sur un scaphandre autonome que comme complément, ou pour corriger l'échauffement dû au fonctionnement des absorbeurs chimiques à gaz carbonique.

Par contre, sur un navire sous-marin l'application du dispositif peut être envisagée, surtout s'il en résulte un accroissement de la force motrice disponible, ce qui est le cas si on l'adapte au fonctionnement de moteurs thermiques sous-marins. Pour ceux-ci en effet les exigences relatives aux teneurs en CO^2 sont moins rigoureuses que pour la respiration humaine et le débit d'eau à assurer est proportionnellement moins grand : aux environs de la teneur 10 pour 100 il suffit de 20^l d'eau pour éliminer 1^l de CO^2. L'avantage du dispositif est d'ailleurs d'éliminer non seulement le gaz carbonique mais tous les gaz dangereux pouvant se dégager pendant la plongée : oxyde de carbone, hydrogène etc. Il ramène automatiquement la composition de l'atmosphère auxiliaire vers la normale, c'est-à-dire vers la proportion des gaz dissous dans l'eau de mer, composition toujours propre à la respiration.

OPTIQUE PHYSIOLOGIQUE. — *Interprétation du phénomène Le Grand-Geblewicz.* Note de M. **Aron Polack**, présentée par M. Charles Fabry.

MM. Le Grand et Geblewicz ont décrit [1] un fait physiologique nouveau, très intéressant, qu'ils ont mis en évidence par voie expérimentale et qui paraît de prime abord d'une interprétation difficile. Il peut se résumer ainsi :

Une source de lumière papillotante, de grand diamètre apparent, fortement colorée ou même monochromatique, très brillante, observée en plein jour, en vision indirecte, donne rapidement la sensation d'une lumière

(1) *Comptes rendus*, 205, 1937, p. 297.

continue et complètement incolore, lorsque, l'œil restant immobile, la fréquence des interruptions atteint 40 à 50 à la seconde. Le fait est d'une netteté frappante, mais ne se produit pas lorsque la rétine est adaptée à l'obscurité; il ne se produit pas non plus, du moins MM. Le Grand et Geblewicz ne l'ont pas constaté, en vision directe; pour cette raison, ils en ont cherché l'interprétation dans la théorie de l'indépendance fonctionnelle des cônes et des bâtonnets, suivant les idées de Parinaud [2], mais la concordance manque entre cette théorie de dualité rétinienne et les conditions expérimentales dans lesquelles le papillotement produit la décoloration des lumières de brillance élevée.

Il me paraît plus simple de chercher l'explication du phénomène Le Grand-Geblewicz dans le jeu des images consécutives.

On sait qu'après l'action de la lumière, la rétine conserve pendant un certain temps son état d'excitation, qui se traduit par des images dites *consécutives*. La première phase de ces images est positive, c'est l'*image persistante;* la seconde phase est une *image négative;* elle succède à la première avec une rapidité variable, suivant les circonstances; sa couleur est complémentaire de celle de la lumière initiale qui lui a donné naissance.

L'expérience montre que, dans un éclairage ambiant suffisant, la durée de l'image persistante est plus courte, lorsque le diamètre apparent de la source observée est plus grand, lorsque sa lumière est plus brillante et son action plus prolongée, lorsque la rétine est plus fatiguée et l'observation pratiquée en vision indirecte.

Toutes ces conditions se trouvent réunies dans le dispositif expérimental de MM. Le Grand et Geblewicz. Il en résulte que la durée de l'image positive ou persistante est réduite à une très faible fraction de seconde et que l'image négative apparaît presque instantanément après chaque excitation de la rétine; ainsi à chaque extinction de la source colorée succède immédiatement l'image négative et avec elle la couleur complémentaire d'autant plus développée que celle de la source est plus saturée.

L'action se déroule comme si deux couleurs, complémentaires l'une à l'autre, alternaient rapidement sur la rétine, en produisant par leur fusion la sensation de blanc; mais le blanc obtenu par papillotement d'une lumière colorée est moins brillant; on le comprend aisément étant donné qu'il est dû à des effets de fatigue rétinienne.

Si l'on fait l'expérience avec une plage, éclairée en lumière rouge, et si

---

(2) *Comptes rendus*, **93**, 1881, p. 286; **99**, 1884, p. 821; **101**, 1885, p. 934.

on la prolonge suffisamment, la couleur vert bleu complémentaire que développe l'image négative augmente avec l'accroissement de la fatigue rétinienne et finit par devenir prédominante dans la sensation. Dans ce cas, le blanc prend une légère teinte bleu verdâtre que l'on désigne sous le nom de *blanc lunaire*.

La décoloration par papillotement d'une lumière colorée, observée en vision indirecte, semble bien avoir pour mécanisme l'alternance rapide sur la rétine de la couleur de la source avec sa complémentaire, vigoureusement développée dans l'image consécutive négative.

Ce mécanisme trouve une confirmation dans le fait que, si l'on accélère la vitesse de rotation du disque obturateur pour augmenter encore le nombre d'interruptions à la seconde et diminuer d'autant la durée de chacune d'elles, on finit par supprimer complètement le phénomène de la décoloration et l'on voit la plage reprendre sa couleur et donner l'impression de lumière continue.

Il est évident que, dans ces conditions, la phase de l'image persistante, aussi courte soit-elle, devient suffisante pour couvrir les très courtes périodes d'interruption et pour assurer la continuité de l'impression lumineuse.

Mais, objectera-t-on, le phénomène Le Grand-Geblewicz n'a pas été constaté en vision directe. (Je dis directe et non centrale ou fovéale, pour indiquer que le territoire rétinien intéressé dépasse les limites de la fovéa, occupée exclusivement par les cônes). La non-participation de la vision directe s'explique facilement par la grande durée relative de l'image persistante, durée qui couvre toute la période d'extinction de la lumière agissante et qui assure la jonction entre les excitations successives de la rétine, d'où l'impression d'une lumière colorée continue. Si l'on diminue le nombre d'interruptions pour en augmenter graduellement la durée jusqu'à dépasser celle des images persistantes, on tombe au-dessous du régime de fusion et l'on voit apparaître dans le papillotement de la lumière colorée des taches de sa couleur complémentaire.

Cette constatation fait penser qu'il ne serait peut-être pas impossible de réaliser même en vision directe le phénomène Le Grand-Geblewicz; il faudrait pour cela renforcer les conditions expérimentales susceptibles de faire abréger davantage la durée des images persistantes. L'une de ces conditions, la principale peut-être, est de produire une fatigue prononcée de la rétine par une exposition préalable et prolongée à la lumière colorée,

très brillante, choisie pour l'expérience. Il serait intéressant d'orienter les recherches dans cette voie.

En résumé, rien ne paraît s'opposer à l'interprétation du phénomène Le Grand-Geblewicz dans le sens des images consécutives. S'il en est ainsi, la belle découverte de ces auteurs pourrait servir de base à une nouvelle méthode de recherches sur les images secondaires ou consécutives et constituer un précieux moyen de mesure de la persistance des impressions rétiniennes en vision directe et indirecte.

BIOMÉTRIE. — *Sur une méthode graphique pour l'analyse de l'hybridation, d'après des recherches sur diverses espèces de Grillons.* Note (¹) de Mlle **Germaine Cousin**, présentée par M. Maurice Caullery.

Les caractères taxonomiques habituellement employés pour la distinction des espèces (proportions relatives du corps, coloration, ornementation, chétotaxie, etc.) sont souvent insuffisants. Cela est plus vrai encore pour la séparation des races ou des hybrides (génération F_1, et, plus encore F_2). La méthode biométrique permet de séparer ces divers groupes au moyen d'indices morphométriques.

Pour établir un indice susceptible d'avoir une valeur taxonomique, on choisit les deux caractères qui divergent le plus, *en sens opposés*, d'une espèce à l'autre. Les rapports entre ces caractères donnent, pour chaque espèce, une série de quotients individuels, qui, mis en polygone de fréquence, permettent d'obtenir, soit deux courbes isolées, alors le problème de séparation est résolu, soit une courbe bimodale. On a, dans ce dernier cas, une zone mixte de rapports égaux, où ne pourra s'opérer aucune détermination. C'est le cas le plus fréquent et l'indice est alors considéré à tort comme insuffisant. Cela s'explique par la méconnaissance du fait que, dans un rapport allométrique, une même valeur d'indice morphométrique, non seulement ne prouve pas l'identité des espèces, mais peut encore servir à les séparer.

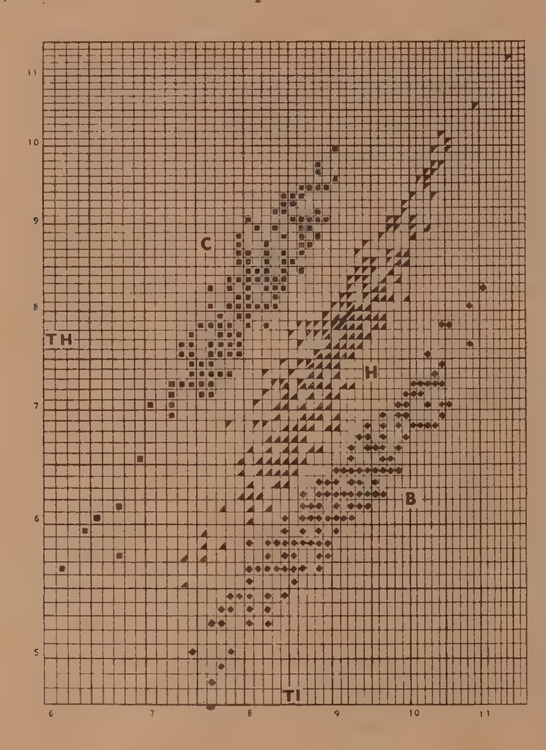
Sans entrer ici dans les détails techniques concernant mesures et calculs, j'envisagerai seulement une technique simple pour faire la sélection de diverses populations morphologiquement proches, par le moyen d'un tableau à double entrée ou tableau de corrélation.

(¹) Séance du 24 avril 1939.

Le tableau doit être établi à l'aide des valeurs individuelles des deux caractères, dont on aura pris les mesures avec le plus de précision possible. On ne peut donc pas se servir, et cela quel que soit le degré de corrélation des deux caractères, des lignes de régression, qui, elles, sont construites avec des moyennes.

S'il existe des différences biométriques suffisantes entre les indices des diverses races ou espèces, soit dans leur degré d'allométrie, soit dans la grandeur des termes de quotients égaux, ces différences apparaîtront automatiquement dans le tableau de corrélation.

Le tableau peut être construit en coordonnées ordinaires. Toutefois, il est bien préférable d'utiliser des coordonnées logarithmiques. Celles-ci respecteront les proportions relatives, non seulement des valeurs individuelles des caractères, mais encore de l'amplitude de leurs variations.



Si le tableau comprend un nombre d'individus suffisant, il fera apparaître toutes les caractéristiques de chaque groupe : variabilité de taille des deux caractères, dispersion des rapports le long de l'axe de la population

et amplitude de leur variation fluctuante, degré de corrélation et valeurs respectives de l'allométrie de l'indice évaluées par la pente de l'axe de chacune des populations.

En résumé, on obtiendra, par cette méthode, la séparation des populations biométriquement différentes. On pourra évaluer les caractéristiques générales des groupes, sans ignorer pourtant les moindres variations individuelles exceptionnelles. Ceci est un point essentiel pour les études biologiques, où l'exception intéressante mérite de n'être jamais perdue dans une moyenne.

Un exemple est donné par le tableau ci-contre, relatif aux recherches que je poursuis depuis longtemps sur l'hybridation entre diverses espèces de Grillons.

Ce tableau, construit en coordonnées logarithmiques, concerne l'indice *Th/Ti* de 769 individus mâles de Gryllides (*Th*, hauteur de la face, *Ti*, longueur du tibia postérieur, évaluées en millimètres). Les indices individuels de ces Grillons forment, comme on voit, trois populations : l'une (C) correspond à *Gr. campestris*, l'autre (B) à *Gr. bimaculatus* et, entre les deux, une population mixte (H), faite des deux hybrides réciproques des deux espèces. Les résultats numériques du travail seront donnés ultérieurement, non seulement pour la génération F_1, mais également pour F_2. C'est d'ailleurs pour ces dernières populations, où s'opère la disjonction des caractères, qu'une étude de ce genre rend d'inappréciables services.

PHYSIQUE BIOLOGIQUE. — *Variations du coefficient d'aimantation spécifique de l'oxyhémoglobine en présence de soude et d'acide chlorhydrique.* Note (1) de Mlle **Paulette Berthier**.

1. Ayant déterminé (2) le coefficient d'aimantation spécifique de l'oxyhémoglobine, il nous a paru intéressant d'étudier l'influence qu'exerce sur ce coefficient la présence de soude et d'acide chlorhydrique, et de suivre les variations du même coefficient en fonction du temps.

L'oxyhémoglobine était dissoute, comme précédemment, dans un milieu solvant constitué par une solution de ClK. A 25^{cm^3} de la solution ainsi obtenue on ajoutait 5^{cm^3} d'une solution de soude ou d'acide chlorhydrique

(1) Séance du 24 avril 1939.

(2) P. Berthier, *Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 943.

de diverses concentrations. Au moyen de la balance magnétique de Curie et Chéneveau on déterminait d'une part la susceptibilité magnétique de la solution d'oxyhémoglobine, d'autre part celle de son milieu solvant, c'est-à-dire d'une solution contenant par unité de volume les mêmes quantités de ClK et de OHNa (ou de ClH) que la solution d'oxyhémoglobine étudiée.

Ces mesures, jointes à la détermination des masses spécifiques et de la concentration en oxyhémoglobine, permettaient d'obtenir, par le mode de calcul développé dans la précédente Note, la valeur du coefficient d'aimantation spécifique k de l'oxyhémoglobine dans les divers milieux solvants envisagés. Toutes les solutions d'oxyhémoglobine étudiées renfermaient $2^{g},5$ de ClK pour 100^{cm^3}, certaines d'entres elles renfermaient en outre OHNa ou ClH sous une concentration C, cette concentration étant nulle pour le témoin. Toutes les solutions ont été étudiées à divers temps t après leur préparation; elles étaient conservées au laboratoire situé dans un sous-sol où la température moyenne est restée voisine de 7° C.

2. Le tableau suivant donne, aux divers temps t, les valeurs de $k.10^6$ pour l'oxyhémoglobine dans les divers milieux solvants envisagés.

	C (OHNa).				C (ClH).	
t (jours).	N.	0,1 N.	0,02 N.	Témoin.	0,02 N.	0,1 N.
0......	−4,34	−2,57	−0,86	+0,34	+2,41	+2,33
1......	−4,08	−1,84	−0,60	+0,34	+6,61	+5,52
3......	−2,48	−0,34	+1,65	+0,49	+2,08	+9,82
5......	−2,00	−0,20	+2,45	+0,65	+1,62	+7,82
8......	−1,86	−0,17	+3,58	+0,71	+1,62	+4,05
12......				+0,71	+1,62	+3,51
25......	−1,23	−0,17	dépôt	dépôt	dépôt	dépôt

Les résultats obtenus indiquent que le coefficient d'aimantation varie en fonction du temps, les solutions finissant d'ailleurs par s'altérer de manière visible par production de dépôts. La présence de OHNa rend l'oxyhémoglobine diamagnétique, mais le coefficient d'aimantation augmente en fonction du temps et pour la plus faible concentration de OHNa finit par devenir positif. La présence de ClH augmente au contraire considérablement, dès le début, la valeur du coefficient k laissant l'oxyhémoglobine paramagnétique; ce coefficient positif croît d'abord en fonction du temps, passe par un maximum et décroît ensuite. Il importe de noter qu'en présence de ClH les solutions d'oxyhémoglobine présentent une zone de

stabilité comprise entre deux concentrations C_1 et C_2 ($C_2 > C_1$), les solutions floculant pour des concentrations en acide supérieures à C_2 ou inférieures à C_1.

3. Ayant déterminé le coefficient pH des diverses solutions, nous donnons ci-dessous les valeurs initiales k_0 du coefficient k en fonction de l'exposant pH.

pH............	1,3	3,4	7,4	8,6	12,7	14,4
$k.10^6$............	+2,33	+2,41	+0,34	−0,86	−2,57	−4,34

Le coefficient k décroît à mesure que le pH augmente, sauf pour les deux valeurs les plus faibles, qui peuvent être d'ailleurs légèrement faussées par suite de la rapidité avec laquelle varie le coefficient d'aimantation spécifique de l'oxyhémoglobine en milieu acide.

CHIMIE PHYSIQUE BIOLOGIQUE. — *Sur la relation entre la concentration et la pression colloido-osmotique du sérum sanguin.* Note (1) de M. **Paul Meyer**.

Dans les solutions des colloïdes lyophiles, la pression osmotique augmente plus rapidement que la concentration. En ce qui concerne le cas spécial du sérum sanguin, ce fait a été reconnu par tous les observateurs. Les recherches systématiques à ce sujet, cependant, ont été peu nombreuses.

Verney (2), admettant que le volume des particules protéiques en solution est relativement élevé, assimile le sérum à un gaz fortement comprimé. Par analogie avec l'équation de van der Waals, il écrit

$$p(v-b)=k,$$

où p désigne la pression colloïdo-osmotique, v l'inverse de la teneur en protéines, et b et k des constantes.

C'est un raisonnement mathématique qui a mené Fishberg (3) à une équation très différente de la précédente. Si l'on admet que l'influence d'une variation de la concentration sur la pression colloïdo-osmotique est proportionnelle à la valeur de celle-ci, on a

$$\frac{dp}{dv}=ap$$

(1) Séance du 24 avril 1939.

(2) *Journ. of Physiol.*, 61, 1926, p. 319.

(3) *Journ. Biol. Chem.*, 81, 1929, p. 205.

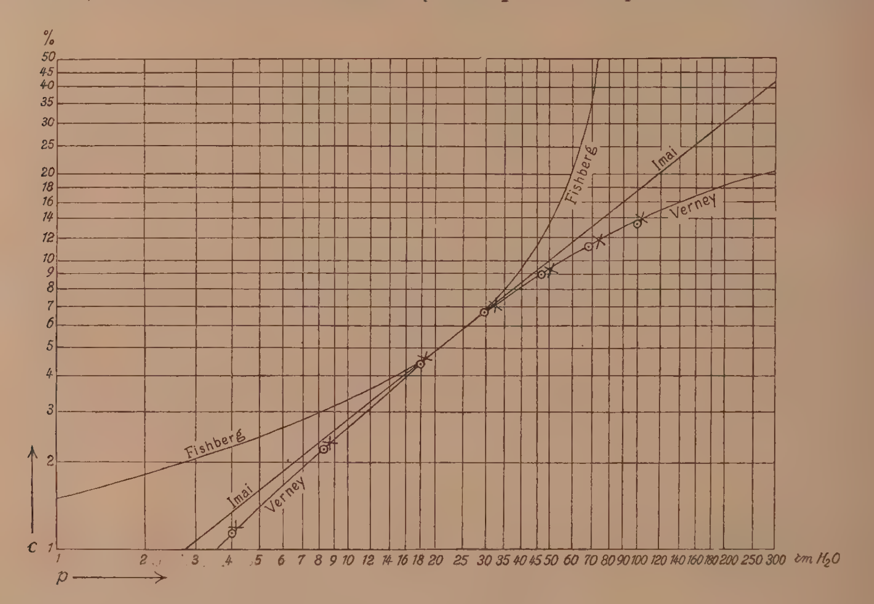
et, par séparation des variables et intégration,

$$\bar{p} = e^{av+b},$$

p et v étant respectivement les inverses de la pression colloïdo-osmotique et de la teneur en protéines, e la base des logarithmes naturels et a et b des constantes.

D'après Imai (4), enfin, la pression colloïdo-osmotique d'une solution varierait avec sa concentration suivant la même loi que la pression d'imbibition d'un gel $p = mc^n$ [Posnjak (5)], p représentant la pression, c la concentration et m et n des constantes.

Ces expressions mathématiques différentes d'un même phénomène nous ont incité à reprendre la question sur une base expérimentale plus large. Après avoir concentré, par ultrafiltration, un certain nombre de sérums humains, nous avons dosé l'azote protéique des liquides ainsi obtenus.



Nous avons ensuite dilué au 5/6, 2/3, 1/2, 1/3, 1/6 et 1/12, avec de l'ultrafiltrat, le sérum concentré, puis mesuré, par la méthode de Krogh et Nakazawa (6), modifiée par nous (7), la pression colloïdo-osmotique de celui-ci et de ses dilutions.

(4) *C. R. Acad. Kioto*, 15, 1935, p. 101.
(5) *Kolloidchem. Beih.*, 3, 1912, p. 417.
(6) *Biochem. Zeits.*, 188, 1927, p. 241.
(7) *Ergebn. d. Physiol.*, 34, 1932, p. 18.

Traçons les courbes de la pression colloïdo-osmotique en fonction de la concentration protéique. Deux couples de valeurs prises sur une de ces courbes permettront de calculer les différentes constantes contenues dans les trois équations indiquées ci-dessus et, partant, d'examiner les variations que, d'après chacune de ces équations, la pression devrait subir en fonction de la concentration. Le graphique ci-contre confronte les résultats de ce calcul avec ceux de deux expériences faites avec les liquides préparés à partir de deux sérums différents (× et ⊙). Il montre que, seule parmi les trois équations proposées, celle de Verney correspond aux observations expérimentales. Les courbes obtenues dans nos autres expériences sont rigoureusement comparables à celles du graphique et ne s'en distinguent que par la valeur numérique des constantes de l'équation.

Krogh et Nakazawa ([6]) ont reproché à l'équation de Verney d'attribuer un volume trop élevé aux particules protéiques en solution. En effet, selon Verney, la constante b indiquerait le volume de 1^{gr} de protéines en solution, car p devient infini lorsque v devient égal à b; et d'après les mesures de ce même auteur, ce volume serait d'environ 7^{cm^3}. Nos mesures personnelles donnent pour b une valeur correspondante à un volume d'environ 4^{cm^3} pour 1^{gr} de protéines. Mais l'espace occupé par les particules colloïdales est certainement encore bien inférieur à cette valeur. L'existence d'une relation non linéaire entre la pression colloïdo-osmotique et la concentration en protéines d'un sérum est due, non seulement au volume relativement élevé des particules protéiques, mais aussi à l'action que celles-ci exercent sur la répartition des ions diffusibles sur les deux côtés de la membrane de l'osmomètre (équilibre de Donnan). Or l'équation de Verney, tout en reflétant fidèlement l'allure du phénomène, ne permet pas de séparer ces deux facteurs.

SÉROLOGIE. — *Contribution au problème de l'extraction de l'hémolysine.* Note de M. **Maurice Doladilhe**, présentée par M. Louis Martin.

Le fractionnement, par les ions hydrogène, des protéines sériques, en milieu déminéralisé, montre que l'hémolysine est localisée dans la protéine visqueuse ([1]) mais n'est liée qu'à une petite partie de ce constituant sérique ([2]). La protéine visqueuse est un colloïde complexe qui, au sein

([1]) Charpentier, Doladilhe et Morel, *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 451.

([2]) *Comptes rendus*, 206, 1938, p. 787.

même du sérum, subit un mûrissement granulaire progressif à partir du moment où le sang est sorti de l'organisme; l'inactivation du sérum par le chauffage *ralentit considérablement et même arrête cette évolution.*

Ce mûrissement granulaire d'un colloïde sérique exerce une influence sur certaines propriétés du sérum sanguin. Ainsi, toutes conditions égales, la solubilité dans l'eau distillée et dans les solutions salines ou légèrement alcalines, des protéines extraites par l'alcool dépend essentiellement du degré de mûrissement de la protéine visqueuse. Lorsque le sérum n'a pas été chauffé, et que, par conséquent, le mûrissement évolue normalement, la solubilité des protéines diminue de plus en plus à mesure qu'augmente le vieillissement du sérum. Lorsque le sérum a été chauffé, cette solubilité se maintient constante au cours du vieillissement. La solution en milieu légèrement alcalin (solution centinormale d'ammoniaque) des protéines d'un sérum chauffé, précipite sous l'influence des ions hydrogène; l'intensité de ce déséquilibre présente le phénomène de zone vis-à-vis du pH de la solution et se révèle toutes conditions égales, plus grande, à chaud qu'à froid. Si l'on porte, par exemple, pendant une heure à 57° la solution amenée au pH pour lequel la précipitation est maxima, on précipite 90 pour 100 environ des protéines dissoutes.

La protéine restée en solution présente des caractères physico-chimiques différents de ceux des autres protéines du sérum; ainsi, précipitée par l'acétone, elle se transforme au contact de l'éther (après agitation) en un *liquide* très visqueux, transparent, teinté de jaune, non dialysable, très soluble dans l'eau et dans les solutions salines, et présentant les réactions caractéristiques des protéines. Cette protéine se distingue aussi par la facilité avec laquelle elle diffuse dans l'eau ou dans les solutions salines. En voici un exemple : précipitons les protéines du sérum par l'alcool ou par l'acétone; lavons le précipité à l'éther; centrifugeons et versons, avec précaution, sur le culot de centrifugation un peu d'eau distillée ou d'eau physiologique. Au bout de quelques heures, la protéine se retrouve dans le liquide.

En opérant sur du sérum hémolytique (anti-mouton provenant du cheval, anti-humain provenant du lapin) nous avons constaté que cette protéine contient toute l'hémolysine.

Ainsi, d'un sérum dont la protéine visqueuse a été stabilisée par le chauffage, on peut extraire une protéine sensiblement différente de la globuline et de l'albumine.

Dans le cas de l'immunsérum hémolytique cette protéine possède les propriétés de l'hémolysine.

Ce résultat est en accord avec de récents travaux de Païc ([3]), dans lesquels l'auteur montre que, dans les champs centrifuges élevés, l'hémolysine sédimente notablement plus vite que la globuline et l'albumine et conclut que cet anti-corps est différent de l'une et l'autre de ces protéines.

MÉDECINE EXPÉRIMENTALE. — *Étude expérimentale de l'influence biologique d'un séjour prolongé à l'altitude. Les modifications hépatiques et musculaires.* Note de MM. **Marius Piéry**, **Jean Enselme**, **Carlos Peschiera** et **Paul Donjon**, présentée par M. Charles Achard.

Nous avons, dans deux Communications précédentes, étudié sur des oies et sur des lapins, les modifications provoquées sur le sang, le poumon, le cœur, pendant un séjour de 6 mois à la station de la Jungfraujoch, à 3457m d'altitude. Dans le but d'observer quelques-uns des effets du séjour sur le foie et les muscles de ces animaux, nous avons dosé le fer total de ces organes. Après les avoir séchés, ceux-ci ont été pulvérisés, la poudre obtenue fut homogénéisée et, sur une portion aliquote, un dosage de fer fut pratiqué par la méthode de Fleury après minéralisation.

Par ailleurs l'examen histologique de prélèvements réalisés sur les foies de ces animaux et pratiqués par M. Joseph Martin, n'a montré aucune anomalie.

Les résultats chimiques obtenus sont les suivants :

1° *Dans le foie*. — *a*. Le fer du foie des *oies* en expérience est pour 1000 de 1,15; 0,83; 2,1; 1,25; 1,93; 1,26; moyenne 1,42.

b. Le fer du foie des oies témoins est pour 1000 de 0,804; 1,46; 1,96; 1,94; moyenne 1,54.

On voit que le fer du foie des oies en expérience est légèrement abaissé.

c. Le fer du foie des *lapins* en expérience est pour 1000 de 0,520; 0,506; 0,681; 0,556; moyenne 0,566.

d. Le fer du foie des lapins témoins est pour 1000 de 0,354; 0,565; 0,400; 0,190; 0,490; moyenne 0,399.

On voit que le fer du foie chez les lapins en expérience est très nettement augmenté.

([3]) *Bulletin de la Société de Chimie biologique*, 21, 1939, p. 413.

2° *Dans les muscles.* — *a.* Le fer du muscle des *oies* en expérience est pour 1000 de 0,099; 0,131; 0,123; 0,091; 0,074; 0,139; moyenne 0,110.

b. Le fer du muscle des oies témoins est pour 1000 de 0,189; 0,159; 0,142; 0,231; moyenne 0,181.

On voit que le fer du muscle des oies en expérience est diminué.

c. Le fer du muscle des *lapins* en expérience est pour 1000 de 0,037; 0,021; 0,059; 0,025; 0,029; moyenne 0,034.

d. Le fer du muscle des lapins témoins est pour 1000 de 0,04; 0,042; 0,035; 0,037; 0,040; moyenne 0,037.

On voit que, pratiquement, le fer du muscle est inchangé.

Les réactions tissulaires qui ressortent de la lecture de ces chiffres semblent donc être différentes suivant qu'il s'agit des oies ou des lapins :

1° Chez les *oies*, on observe un abaissement très net du fer musculaire et un abaissement léger du fer hépatique. Dès l'arrivée à l'altitude, le système hématopoiétique des animaux augmente ses exigences en fer pour réaliser une quantité plus grande d'hémoglobine. Les abaissements tissulaires constatés en sont probablement la conséquence.

2° Chez les *lapins*, on note une égalité du fer musculaire et une augmentation du fer hépatique. Nous supposons qu'il s'agit là d'une réaction secondaire des tissus qui, après un séjour prolongé, rehausse leur teneur en fer et dépasse même les chiffres normaux. L'évolution de la compensation se ferait plus rapidement chez le mammifère que chez l'oiseau.

On sait que le fer tissulaire n'est pas seulement une réserve établie pour fournir le fer de l'hémoglobine, mais qu'il est en outre un agent d'activation de l'oxygène, partant sa diminution peut être un facteur d'anoxie, son augmentation au contraire peut aider à l'éviter. On observerait donc au niveau du foie du lapin un mécanisme de défense lentement établi. De nouvelles études portant sur des animaux vivant à l'altitude depuis plusieurs années, études actuellement en cours, infirmeront ou confirmeront cette hypothèse.

A 15h50m l'Académie se forme en Comité secret.

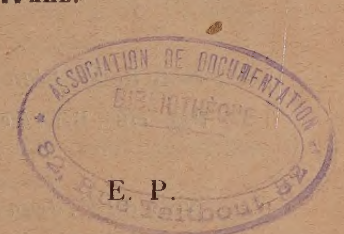
COMITÉ SECRET.

La Section de Chimie, par l'organe de son Doyen, présente la liste suivante de candidats à la place vacante dans la Section de Chimie par le décès de M. *Georges Urbain* :

En première ligne...........	M. **Marc Tiffeneau.**
En seconde ligne, ex æquo *par ordre alphabétique*........	MM. **Edmond Blaise, Pierre Jolibois, Paul Pascal, Marcel Sommelet. André Wahl.**

Les titres de ces candidats sont discutés.
L'élection aura lieu dans la prochaine séance.

La séance est levée à 16h45m.



E. P.

ERRATA.

—

(Séance du 17 avril 1939.)

Note de M. *Émile Borel*, Sur certains problèmes de répartition et les probabilités virtuelles :

Page 1178, formule (1), *au lieu de* $c_{,1}\ c_2$, *lire* $c_1 c_2$.

Page 1179, dernière ligne, *au lieu de* que a soit ou non entier, *lire* que n/k soit ou non entier.

Page 1180, note au bas de la page, ligne 1, *au lieu de* lorsque a n'est pas entier, *lire* lorsque n/k n'est pas entier.

Note de M. *Léon Lecornu*, Sur la propagation des ondes sphériques :

Page 1187, ligne 4 en remontant, *au lieu de* diamètre fini, *lire* diamètre fixe.

Note de M. *Jean Bricard*, Étude sur la formation du givre au sommet du Puy de Dôme :

Page 1237, ligne 16, *au lieu de* sont inférieurs à ceux que j'ai mesurés, *lire* sont supérieurs à ceux que j'ai mesurés.

(Séance du 24 avril 1939.)

Note de M. *Henri Devaux*, Un rapport remarquable entre la constitution cellulaire et la mouillabilité du corps des mousses :

Page 1261, ligne 23, *au lieu de* pourvu de sporogones, *lire* pourvu d'un sporogone.